提出问题的一个实用建议

710062 陕西师范大学数学系 丁 芳(硕士生) 罗增儒

本刊2005年第3期"编后漫笔"谈到了《关于教师的"一桶水"》(文[1]), 字里行间不仅表达了老一代数学教育工作者对教学现实的负责任的关注, 而且也表达了关于教师知识的一些与时俱进的新认识.

传统意义上"要给学生一杯水, 教师得有一桶水", 更多的是从教师传授知识的角度, 从知识的量上去谈的, 而文[1]的认识不仅继承了其中的合理成份, 而且从数学知识拓展到教学知识、拓展到教师"做一点数学研究"的经历上, 拓展到数学与教育工作的有机结合, 量与质的辩证统一上. 这引出一个话题, 中学教师怎样"做一点数学研究"?

原则上说, 中学教师进行高等数学的前沿研究虽然并非不可能, 但更现实的是进行中学数学的研究(见文[2]). 然而, 怎样从成熟的中学数学中寻找问题呢? 本文的实用建议是采用"否定假设法". 作为示例, 我们来处理2005年初中联赛的一道解答题.

一、否定假设法

作为对如何提出问题的一个可操作性回答, 1990年布朗与沃尔特合著《提出问题的艺术》一书, 提出了否定假设法:

(1) 确定出发点, 这可以是已知的命题、问题或概念等;

(2) 对所确定的对象进行分析, 列举出它的各个"属性";

(3) 就所列举的属性进行思考: 如果这一属性不是这样的话, 那它可能是什么?

(4) 依据上述对于各种可能性的分析提出新的问题;

(5) 对所提出的新问题进行选择.

下面是体现否定假设法的一次实践.

二、提出问题的过程

1. *确定出发点.*

这是2005年初中联赛一道解答题及其参考答案:

例1 a、b、c为正整数, 且$a^2+b^3=c^4$, 求c的最小值(见文[3]).

解: 显然$c>1$, 再由

$$b^3=(c^2-a)(c^2+a), \quad ①$$

若取

$$\begin{cases} c^2-a=b, \\ c^2+a=b^2, \end{cases} \quad ②$$

这时

$$c^2=\frac{b(b+1)}{2}. \quad ③$$

自小到大考察b, 使右端取平方数, 可知, 当$b=8$时, 有$c=6$, 从而$a=28$. ④

接下来说明, c没有更小的正整数解, 列表如下:

c的值	c^4	小于c^4的立方数x^3
2	16	1、8
3	81	1、8、27、64
4	256	1、8、27、64、125、216
5	625	1、8、27、64、125、216、343、512

此表每一行中, c^4-x^3皆不是平方数, 因此c的最小值为6.

2. *对所确定的对象进行分析, 列举出它的各个"属性"; 对所列举的每一"属性"进行思考; 如果这一属性不是这样的, 那它可能是什么? 由此能提出什么问题?*

列举"属性", 我们从题目、解法两个层面上展开, 并把列举与否定假设、提出问题结合起来进行.

(1) 题目属于数论中的不定方程的问题. 即在方程

$$x^2+y^3=z^4. \quad ⑤$$

的正整数解(a,b,c)中, 找出最小的c来.

首先对方程的性态作分析, 有

$$\begin{cases}\text{无正整数解.}\\ \text{有正整数解}\begin{cases}\text{惟一解;}\\ \text{大于1的有限个解;}\\ \text{无限个解.}\end{cases}\end{cases}$$

题意本身暗示方程有解, 并在此基础上找出最小的c来. 对此可以作两方面的否定假设, 至少引出3个问题:

否定方程有解的暗示, 得

问题1　方程式$x^2+y^3=z^4$是否有正整数解?

否定求最小的正整数c. 这涉及方程式⑤有有限个解时, 设法把它求出来; 方程⑤有无限个解时, 找出通解表达式. 得:

问题2　找出方程$x^2+y^3=z^4$的所有正整数解.

问题3　证明方程$x^2+y^3=z^4$有无限个正整数解.

(2) 解法本身包含着两个步骤, 首先是必要性(由①～④式), 取满足题意的一种可能式②, 得出c关于自变量b的函数关系式③, 由③求出c的最小值$c=6$. 而这对于题意来说, 只表明c的最小值不大于6, 因而有第二步关于充分性的检验, 即列表说明$c=2$、3、4、5均不满足题意, 又得出c的最小值不少于6. 两步骤的结合得出c的最小值为6. 对这一过程的每一"属性"(每一实质进展的步骤)作否定假设, 至少引出9个问题.

否定第①式, 得

问题4　如果不把已知式化为$b^3=(c^2-a)(c^2+a)$, 还能作那些有助于求解的变形, 包括直接的恒等变形和间接的换元变形等.

否定第②式, 这就需对b^3的分解式作出穷举, 仅在$b=8$时, b^3就有5种情况:

$$\begin{aligned}b^3=2^9&=1\times2^9=2\times2^8=2^2\times2^7\\&=2^3\times2^6=2^4\times2^5.\end{aligned}$$

并且, b不取具体数字时, 根本就列举不出多少种情况来. 这促使我们对b分类, 最简单的是奇偶分类, 或素数、合数分类. 得:

问题5　当b为偶数时, 如何由$b^3=(c^2-a)(c^2+a)$求出c^2的表达式?

问题6　当b为素数时, 如何由$b^3=(c^2-a)(c^2+a)$求出c^2的表达式?

问题7　当b为奇合数时, 如何由$b^3=(c^2-a)(c^2+a)$求出c^2的表达式?

进一步还可以提出:

问题8　当b为偶数时, 求方程$a^2+b^3=c^4$的正整数解.

问题9　当b为素数时, 求方程$a^2+b^3=c^4$的正整数解.

问题10　当b为奇合数时, 求方程$a^2+b^3=c^4$的正整数解.

否定第③式只验证到$b=8$, 那就继续验证$b=9$、10、$\cdots$, 如果只借助于笔算, 会得出

问题11　$b=8$, $c=6$, $a=28$是满足$a^2+b^3=c^4$的惟一解吗?

进一步还会想到:

问题12　编一个程序, 在计算机上搜索方程$c^2=\dfrac{b(b+1)}{2}$的正整数解.

问题13　求方程$c^2=1+2+\cdots+b$的正整数解.

若把$c^2=\dfrac{b(b+1)}{2}$变形、配方, 有

$8c^2+1=(2b+1)^2$.

记$x=2b+1$, $y=c$, 问题转化为

问题14　求方程$x^2-8y^2=1$的正整数解.

这是一个已经解决的问题(Pell方程), 有递推公式及无穷解的一般表达式(见文[4])

$$\begin{cases}x_n=\dfrac{1}{2}[(17+12\sqrt{2})^n+(17-12\sqrt{2})^n],\\ y_n=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}[(17+12\sqrt{2})^n-(17-12\sqrt{2})^n].\end{cases}\quad⑥$$

其中, $n=1$时, $x_1=17$, $y_1=6$为最小解. 所以, 我们可以认为, 竞赛题有Pell方程$x^2-8y^2=1$最小解的一个背景.

问题先提到这里.

3. *对所提出的问题进行选择.*

如上所说, 由$b^3=(c^2-a)(c^2+a)$有很多选择, 而一旦选择

$$\begin{cases}c^2-a=b,\\ c^2+a=b^2,\end{cases}$$

则问题可转化为Pell方程, 并有相应结论, 因

此, 我们的兴趣放在对 ① 式的更多选择上. 作为示例, 我们来考虑问题5的一个特例$b=2^n$.

三、方程 $a^2+b^3=c^4$ 有无穷个正整数解

通解式⑥已作了一个回答, 下面再提供一个途径.

例2 当b为$2^n(n\geqslant 3)$时, 方程有无穷个正整数解.

证明: 由已知, 有

$(c^2-a)(c^2+a)=2^{3n}=2^k\cdot 2^{3n-k}$,

其中$3n-k>k$, 即$3n>2k$. 得

$$\begin{cases} c^2-a=2^k, \\ c^2+a=2^{3n-k}, \end{cases} \quad ⑦$$

消去a得

$$c^2=\frac{1}{2}(2^{3n-k}+2^k)=2^{k-1}\cdot(2^{3n-2k}+1).$$

由于右方的2^{k-1}与$2^{3n-2k}+1$是互素的, 故右方要成为平方数只能2^{k-1}与 $2^{3n-2k}+1$分别为平方数, 得$k-1$为偶数, $2^{3n-2k}+1$为奇数的平方, 即k为奇数且存在非负整数l, 使$2^{3n-2k}+1=(2l+1)^2$, 有

$$2^{3n-2k}=4l(l+1),$$

即

$$2^{3n-2k-2}=l(l+1).$$

由于l与$l+1$必为一奇一偶, 而$2^{3n-2k-2}$只有正奇因数1, 故得

$$\begin{cases} l=1, \\ 3n-2k-2=1. \end{cases}$$

推出$3(n-1)=2k$. 但$(3,2)=1$,故k应为能被3整除的奇数, 记为$k=6m+3,(m\geqslant 0)$, 则$n=4m+3\Longrightarrow b=2^{4m+3}=8\times 2^{4m}$.

进而由 ⑦ 得 $a=7\times 2^{6m+2}=28\times 2^{6m}$, $c=3\times 2^{3m+1}=6\times 2^{3m}$.

这样, 我们就得到了

$$\begin{cases} a=28\times 2^{6m}, \\ b=8\times 2^{4m}, \quad (m\text{为非负整数}), \\ c=6\times 2^{3m}, \end{cases}$$

满足方程$a^2+b^3=c^4$. 当m取遍非负整数时便得出无穷个正整数解.

这个解也可由$28^2+8^3=6^4$两边乘以2^{12m}得到. 若两边乘以t^{12m} $(t\in\mathbf{Z})$, 还可得出更多解.

至此, 我们已经经历了一个从如何提出问题到具体解决问题的研究过程, 而对这个过程我们又可以使用否定假设法再进行反思. 中学教师经常对课本习题, 中考、高考或竞赛题进行这样的属性分析与否定假设, 既是可行的, 又是有益的, 希望能对中学教师"做一点数学研究"有所帮助.

例1的更多问题留给读者去探究.

参考文献

[1] 张奠宙、赵小平. 关于教师的"一桶水". 数学教学. 2005. 3.

[2] 罗增儒. 谈中学教师的数学研究工作. 中学数学教学参考. 1997. 7、8 ~ 9.

[3] 2005年全国初中数学联赛参考答案与评分标准. 中学生数学. 2005. 6(下).

[4] 单墫. 趣味数论. 北京:中国青年出版社. 1987. 12.

(上接第11–43页)

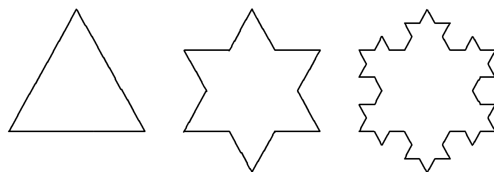
作得到:将P_k的每条边三等分, 以每边中间部分的线段为边, 向外作等边三角形, 再将中间部分的线段去掉$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$. 记S_n为P_n所围成图形的面积. (1)求数列$\{S_n\}$的通项公式; (2)求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

提示: $S_0=1$, $S_1=S_0+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=1+\frac{1}{3}$, $S_2=S_1+3\times 4\times\frac{1}{3^4}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}$,

于是可猜想: $S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}=\cdots=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n$,

然后用数学归纳法进行证明, 进而求得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8}{5}.$$



亲历六十年数学教育发展的几点反思

数学思维训练左右脑协调研究中心实验基地　上海市实验学校　陈振宣

流光一瞬, 六十年弹指一挥间, 走上讲台忽忽六十春秋, 有幸亲历了数学教育改革的风风雨雨, 一直在追求数学教育的理想境界, 使莘莘学子, 学得愉快, 达到提高思维能力, 开发脑潜能的目的. 为了这一目的, 我上下求索, 即使在文革中受到迫害的日日夜夜也未中断, 对数学教育情有独钟, 写下反思, 请同行及专家批评指正.

一、历史的回顾

上世纪三、四十年代, 中国的数学教育主要向英美学习, 多数教材系风行几十年的教科书, 代数有: Fine的、 Hall & Knight的, 还有Chrystal的《Text Book of Algebra》; 三角有: Granville的、 Loney与Hall & Knight的; 解析几何有: Smith & Gale的《 Elements of Analytic Geometry》和Loney的《Coordinate Geometry》. 这些书多以解题方法优美独特见长, 陈省身大师上世纪七十年代第一次归国, 还推荐重译Hall & Knight的《Higher Algebra》, 可见其影响深远.

当时教育的大环境是“万般皆下品, 惟有读书高”. 1946年我在一所大型中学担任高三理甲班班主任与解析几何教师, 教学指导思想是“以多取胜”, 集上述英美教材众家之长, 灌给学生, 学生用功, 做作业到深夜. 1947年毕业28人中26人考取清华、交大、浙大、北洋、厦门等国立大学, 1人进私立大学, 1人半年后考入兵工学院. 48届毕业班, 成绩仍十分优异, 多数进入国立大学, 有1人考取清华、交大等五所大学, 1人考取海军学院与一国立大学, 但因患肺病而失去深造机会, 使我初步认识到“题海”的危害.

五十年代向苏联学习, 重视基本知识、基本技能的教学, 这对教师提高数学修养大有益处, 我从中获益匪浅. 当时我所在学校是小型学校, 但仍然有不少优秀学生, 在竞赛与升学中都有出色的成绩, 教学相长, 获益良多.

1958年迎来教改第一次浪潮, 提倡理论联系实际的正确导向, 平面几何中被认为“无用”的概念、定理大量删除, 从当时删节本可见一斑. 为此我曾去过许多大型工厂作调查, 收集不少应用素材, 然而涉及专业知识, 学生难以理解, 这一改革以失败告终.

受“新数”运动影响, 1960年在上海召开的全国数学代表大会, 华罗庚、关肇直来了, 许多数学家从全国各地来到上海, 也有少数上海的中学教师列席. 大会的口号有“函数为纲”、“打倒欧家店”. 朱凤豪、赵宪初前辈对平几的改革提了不同意见, 被斥为保守思想, 北师大、华东师大分别编写了教材, 不少大学的内容下放到中学. 这一改革步子很大, 因脱离教学实际, 被1963年人教社的教材所代替, 这一反复给人留下难忘的记忆.

到了文革极“左”思潮泛滥, 教材体系遭到彻底破坏, 教学质量大滑坡, 1963年颇受欢迎的那套教材, 遭到全盘否定.

文革后拨乱反正, 1980年教育部召开全国数学教材改革会议, 我有幸参加新大纲制定的讨论, 按“精简、增加、渗透”的六字方针, 向量、矩阵和行列式、概率、微积分初步都列入新大纲, 人教社编出征求意见稿, 受到肯定. 后由于长官意志干预, 又退回到原来的水平, 至九十年代末人教社的按新教学大纲编写的新教材在二省一市试验, 2000年开始逐步推广, 一晃二十年, 多么沉痛的教训!

八十年代开始, 数学教学改革逐步深入, 尤

其是将思维能力的培养提上议事日程, 波利亚的三部经典《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》[1]的引入, 徐利治先生的《数学方法论选讲》[2] 起了巨大作用, 时至今日, 数学思想方法已列入考试大纲.

九十年代以后改革在深入, 认识在发展, 然而“题海战术”仍然统治着中国的数学教育, 学生负担之重, 令人担忧.

二、几点反思

去年国际数学大师陈省身驾鹤西去前一个月, 张奠宙教授就数学教育对大师作了专题采访. 大师说到“中国的数学教育在实践上肯定比美国好. 事实胜于雄辩, 中国好不容易有一项比美国好的数学教育成绩, 为什么不珍惜, 不总结呢?”[3] 这更促使我进行认真的反思.

1. *对数学教育理念的认识*

北大在接待美国数学代表团时, 张筑生院士在答问中说“如果一位数学教师只会教公式微积分或者其他死套公式的‘学问’, 那么他可能是要丢饭碗的; 如果他擅长于教学生用数学的方式去思考、去探索, 那么任何机器都无法代替他的作用.” 筑生院士英年早逝, 他的话击中数学教育的核心. “教会学生用数学方式去思考去探索”是否就是教会学生数学地思维? 数学地思维的特征可否概括为:

(1) 数学化　面对现实问题, 通过心智活动, 抓住事物的主要矛盾, 从量或形的角度把握事物关系的结构特征, 再用形象化的或符号化的语言正确地或近似地刻划出来, 即建立问题的数学模型, 亦即实现问题的数学化, 以便用数学工具来解决, 这是数学地思维的首要基本特征.

(2) 最优化　在实现问题数学化的基础上, 考察所有的可能性, 力求最优解.

(3) 符号化　为了提高思维效率, 精确地实行数学化, 在自然语言的基础上, 利用图形直观、义形直观、唯义直观创造符号语言和图象语言, 扩大数学化的能力和适用的范围.

(4) 抽象化　为了抓住事物的主要矛盾或基本矛盾, 通过抽象概括, 丢弃次要因素, “去粗取精, 去伪存真, 由此及彼, 由表及里”, 逐步使事物理想化, 达到认识的逐步深化.

(5) 逻辑化　数学地思维不满足知其然, 而且要追索其所以然. 在数学里崇尚逻辑推理和逻辑分析, 把握事物之间的逻辑联系. 通过论证来确认真理, 推翻伪理, 培养独立判断真伪的能力. 此外, 数学地思维非但不排斥直觉思维和辩证思维, 相反地十分重视直觉思维和辩证思维, 这是数学的思维的又一重要特征.[4]

具有数学地思维的头脑, 不但能掌握数学, 更使人们能批判地阅读, 判断真理, 识别谬误, 分析偏见, 估计风险, 审时度势. 信息社会需要具有数学头脑的人才, 这就是社会发展对数学教育提出的要求.

数学教育只有适应社会发展的要求, 才会前进和发展, 否则有可能误入歧途.

2. *数学教育是开发人脑潜能的有效途径之一*

人类进入信息社会之后, 比过去任何时候都更需要为生活、为竞争而思考, 特别是数学地思维. 人们普遍认识到现代数学在训练各级人才智力方面起着日益重要的作用, 脑科学、思维科学的新成果, 揭示了数学教育是开发人脑智能的有效途径之一.

早在上世纪五、六十年代, 我们曾探索过唯物辩证法对教学教育改革的指导作用, 那时已发现方程思想(当时称为方程观点)和字母代“数”与代“式”思想在提高思维能力方面的作用.八十年代逐步上升为常用思维方法, 时至今日对思维方法在启智中的作用已无人怀疑.

八十年代以来, 经过几轮数学教育的科研实践, 逐渐认识到开发脑潜能要从以下几方面作努力.

第一, 要在数学知识和数学语言的理解上下功夫, 要自觉构建数学重大概念、原理的意象(也可称为心智图象, 但不一定以几何图形显示). 以此为思维载体, 便于发挥其优势, 取得有价值的结晶. 一个生动的例子是三角函数概念的活动模型[4], 使得三角函数的性质、图象、加法定理等等都成了学生独立探索的结

果, 就像他们自己发明的一样.

为强化数学地思维的基本功, 要重视数学语言的三种形态(自然语言、符号语言、图象语言)互译的训练[5], 这是左、右脑协调开发脑潜能的必由的途径之一.

第二, 思维方法是思维的导航器, 经常引导学生从方法论的高度作概括, 领会思维方法的实质, 是提高思维能力的有力措施.

与思维方法同等重要的是科学的学习方法, 华罗庚所倡导的从薄到厚、从厚到薄是古今中外治学的重要方法[6]. 它与儒家经典中"吾道一以贯之"、"一言以蔽之"、"收之可藏之于密, 放之则弥六合"是一脉相通的.

许多优秀的教师还总结了"听讲"、"自习"、"复习"、"作业"的具体方法, 就不一一列举了.

笛卡儿说:"最有价值的知识是关于方法的知识". 既重视思维方法的领会与概括, 又注意科学学习方法的指导是开发脑功能不可忽视的教育规律.

第三, 中国教育的传统是"既教书又育人". 中国的数学教育从中吸取了丰富的"营养", 这是教育以人为本的思想的体现. 人是有情感的, 脑科学证实"人的思维总是伴随着情感的发展变化同步进行", "情感与思维是息息相关, 存在千丝万缕的联系", 人的智能有两个侧面, 一面是智力因素, 另一面是情感因素(可称为情感智力). 把情感因素一概排斥于智力之外, 称之为非智力因素, 是否和"无理数"一样是历史的误解?

从我们的科研实践中发现:

(i) 师生情感交流, 师爱生, 生尊师, 亲密无间, 是提高教育效率的必要条件.

(ii) 在数学学习中培养毅力, 热爱科学, 热爱真理, 了解数学的科学价值, 应用价值, 是提高学习数学原动力所必需的.

(iii) 通过小型研究性课题、应用课题, 培养探究欲与应用意识, 丰富创新实践的体验.

通过数学文化学习和数学欣赏, 提高学习兴趣, 享受数学好玩, 都是开发脑功能值得研究的课题. 经过大家的努力, 成果不断涌现, 一定会出现一条体现中国数学教育优势的平坦大道, 为圆中国数学强国之梦, 从我们的课堂里不断走出数学大师和各类优秀人才奉献我们的绵簿之力.

3. 值得记取的历史教训

(1) 对待平面几何的改革, 中国和世界都经历了几次反复, 破坏平几的教育体系, 采取削弱或排斥证明的做法是错误的, 相反过分加深证明的难度, 像中国四十年代初把中学平几上升到近世几何的水平, 大讲几何名题也是不可取的. 平几是培养理性思维的极佳载体, 生动的直观图形和易于理解的推理, 是进行理性思维与开发脑功能的理想素材. 1958年及文革中的教训应永远记取.

(2) 重视数学应用的教育应坚持, 但不能脱离学生实际, 对一些情景描述不清生硬编制的"应用"题不应提倡. 文革中错误做法应引以为训.

(3) 由于考试文化的历史影响, "题海战术"仍然统制着数学教育. 学生负担之重是空前的. 必须采取措施予以彻底纠正, 建议在全国开展人人关心中国数学教育未来的大讨论, 共商改革大计, 全国上下群策群力, 把数学教育推上新的台阶.

六十年来, 常觉今是而昨非, 写下肺腑之言, 以实际行动参与大讨论, 请广大教育工作者及专家指正.

参考文献

[1]《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》. 科学出版社1982、1984年出版.

[2] 徐利治.《数学方法论选讲》. 华中工学院出版社. 1983年出版.

[3] 张奠宙. 我们要对自己有信心. 《文汇报》. 2004年11月29日第9版.

[4] 陈振宣.《培养数学思维能力的探索》. 上海教育出版社. 1998年8月出版.

[5] 陈振宣等. 《高考数学命题研究与试题评析》. 上海科教出版社. 1990年出版.

[6]《华罗庚科普著作选集》.P.301、P.305. 上海教育出版社. 1984年出版.

例谈图形计算器与数学概念课教学

200063 上海市普陀区教育学院中学教研室 刘 达 200065 上海市宜川中学 宋荷娟

上海市二期课改的《课程方案》开宗明义地阐明了"依托上海建设国际化大都市和数字化城市的教育环境, 构建以德育为核心, 以培养学生创新精神和实践能力为重点, 以完善学习方式为特征, 以应用现代信息技术为标志, 关注学生学习经历和促进每一位学生发展"的课程体系. 在《上海市中小学数学课程标准 (试行稿)》中, 对于数学的课程目标从"知识与技能"、"过程与方法"、"情感态度与价值观"三个维度给予了详细的阐述. 其中明确提出: "计算器 (包括科学计算器、函数型计算器和图形计算器) 应成为学生在数值运算和探索研究中经常使用的学具.$\cdots\cdots$ 利用计算机 (器) 在作图、模拟、数据处理等方面的强大功能, 调整课程内容的取舍、重点和体系结构, 改善内容的呈现方式及其学习过程."

图形计算器的应用在上海多所重点中学中已经试点多年. 目前, 图形计算器已经为越来越多的中学数学教师所接受. 不少青年教师在实践中正在自觉地让图形计算器"参与"到数学的教学活动中. 但纵观近两年来的教学实践, 图形计算器更多地被教师们"限制"在了"拓展型课程" 或"研究型课程"的领域. 而如果要让图形计算器在日常的数学课堂上有所作为, 那我们势必应更多地关注数学概念课的教学.

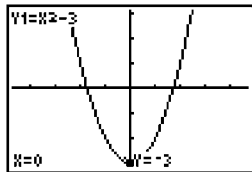
案例 函数的奇偶性

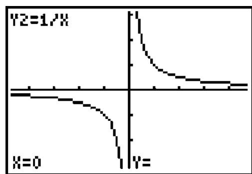
开展函数奇偶性教学, 图形计算器能够很好地发挥图象的优势.

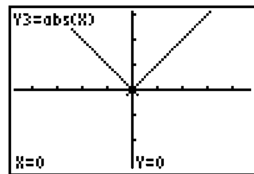
1. 观察函数的图象特点

教师借助图形计算器给出部分函数的图象 (如图), 要求学生观察图象特点.

师: 请同学们观察以后回答, 以上三个函数具有怎样的对称性?







生: 通过观察, 函数 $y_1 = x^2 - 3$ 和函数 $y_3 = |x|$ 的图象关于 y 轴成轴对称; 函数 $y_2 = \dfrac{1}{x}$ 的图象关于原点成中心对称.

师: 很好. 轴对称和中心对称是我们在初中的学习中就已熟悉的两种图形特征. 同学们一定还能给出不少其他具有这些图象特征的函数吧?

生: 图象关于 y 轴成轴对称图形的还有 $y = x^2$、$y = -x^2$ 等; 图象关于原点中心对称的函数还有 $y = x$、$y = x^3$ 等$\cdots\cdots$

师: 是啊, 的确有很多, 随着学习的深入还会越来越多. 那么, 我们现在对这些函数对称性的认可是基于什么理由呢?

生: 直观看到的结果.

2. 由图象特点探究函数性质

师: 那么直观的函数图象所体现的函数性质究竟是什么呢? 让我们首先利用图形计算器的列表功能再做一番研究. 请你们自己观察这些函数的列表数据 (教师操作演示).

X	Y1	
-3	6	
-2	1	
-1	-2	
0	-3	
1	-2	
2	1	
3	6	

X=-3

X	Y2
-3	-.3333
-2	-.5
-1	-1
0	ERROR
1	1
2	.5
3	.33333

X=-3

X	Y3
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3

X=-3

此处, 教师引导学生用函数自变量与函数值数据的关系来描述函数图形对称的特性. 教师要求学生自制类似表格研究并思考如何叙述所观察到的结论:

x	-1	1	-2	2	$-a$	a
$f(x)$						

师: 从这些函数自变量与函数值数据的规律, 你能得到怎样的结论?

生: (经几位同学的补充完善) 函数 $y=x^2-3$ 和函数 $y=|x|$ 的共同点是当自变量互为相反数时, 函数值相同! 而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 等的共同点是当自变量互为相反数时, 函数值也互为相反数!

3. 导出偶函数的定义

师: 很好. 其实这两类函数所具有的性质就是今天我们所要研究的课题"函数的奇偶性". 其中, 图象关于 y 轴对称的这类函数我们称之为偶函数. 结合刚才同学们的观察和描述, 我们一起来尝试从中提炼出偶函数的定义……

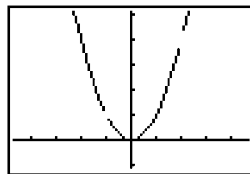
教师通过引导, 逐步给出偶函数的概念: 如果对于函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 内的任意实数 a, 都有 $f(-a)=f(a)$, 那么函数 $y=f(x)$ 称为偶函数. 教学过程中, 教师同时突出了概念中的定义域、自变量的任意性等关键词. 并进一步提问并指出, 函数定义域关于原点对称是该函数为偶函数的必要条件.

完成了这一环节后, 教师要求学生类比上述研究方法, 探求奇函数的定义.

点评: 教师利用图形计算器的图象和列表功能, 引导学生经历"观察现象——总结规律——提炼概念"的过程. 学生经历了这一阶段后, 能尝试自主地建构起奇函数的概念. 因此, 教师采用的教学方法是成功的. 这里, 图形计算器起到的作用也是十分明显的. 第一, 即时给出了函数图象; 第二, 教师利用计算器的列表功能, 将函数自变量与函数值的关系作为一种现象呈现给了学生, 学生从中发现并获得了重要的信息, 并最终提炼成了奇偶函数的概念. 图形计算器所起的作用正是提供了学生自主学习的平台和探究的素材. 因此, 这无疑是发挥了计算器优势, 将理念和技术较好结合的成功细节.

4. 辨析函数奇偶性和函数图象的关系

师: 我们知道, 若函数图象关于原点成中心对称, 则此函数是奇函数; 若函数图象关于 y 轴成轴对称图形, 则此函数是偶函数. 奇函数与偶函数的图象特征为我们判断函数的奇偶性带来了很多方便. 但是, 我们仅仅借助图象来判断函数的奇偶性有时也会犯错误的，例如



X	Y1
-3	9
-2	4
-1	ERROR
0	0
1	1
2	ERROR
3	9

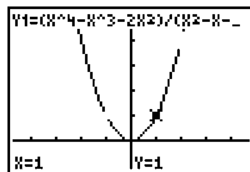
X=-3

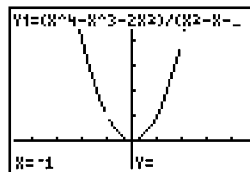
问题1: 观察函数 $y=\dfrac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-x-2}$ 的图象, 你认为此函数的奇偶性如何?

生: 偶函数.

师: 你们的判断是否正确, 让我们来仔细观察.

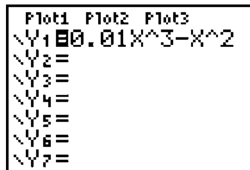
有的学生首先提出列表观察. 从中发现了当自变量等于 -1 和 2 时, 函数值不存在; 其他同学利用数据跟踪的方法, 按下 [TRACE], 输入 [1] [ENTER], 计算器上显示出当 $x=1$ 时函数值为 1. 输入 [(−)] [1] [ENTER], 计算器上显示出当 $x=-1$ 时函数值不存在; 这说明点 $(1,1)$ 在此函数的图象上, 而它关于 y 轴的对称点 $(-1,1)$ 不在图象上! 类似地, 输入 [(−)] [2] [ENTER], 计算器上显示出当 $x=-2$ 时的函数值为 4. 输入 [2] [ENTER], 计算器上显示出当 $x=2$ 时函数值不存在.

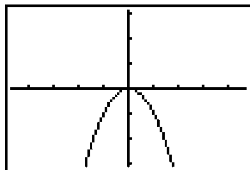




师: 由此我们可知, 该函数其实不是偶函数.

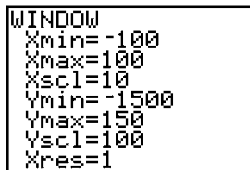
师: 让我们再看问题 2: 观察函数 $y = 0.01x^3 - x^2$ 的图象, 你认为此函数的奇偶性如何?

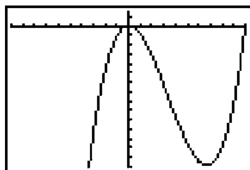




生: 我们要利用概念来分析. 观察列表可知, 该函数既非奇函数又非偶函数!

师: 非常好! 事实上, 我们在计算器上所看到的只是这个函数局部的图象, 如果我们调整一下视窗的可见范围的话, 我们就很容易获得结论了. 因此, 奇偶性可以认为是函数的一个全局的性质, 我们在今后的学习中应当多加关注.





点评: 这里, 教师针对技术应用背景下学生学习奇偶性概念容易出现的问题, 即依赖图象的对称性来确定函数的奇偶性这一问题，有意识地选择了一个典型的反例. 通过辨析, 学生体会到判断函数奇偶性需要从严格的概念入手, 概念中的每个细节都十分关键. 另外, 教师在阐述问题2时, 还提出了"视窗"的概念, 并告诉学生我们在计算器上所看到的仅仅是函数图象的一部分(无论如何放大), 在我们研究函数的一些整体性质的时候, 仅靠这个"看得到"的局部是远远不够的. 这样的教学设计既有效地发挥了图形计算器的优势, 又避免了技术对数学概念教学的潜在影响. 这样的案例值得我们借鉴和反思.

案例　函数的单调性

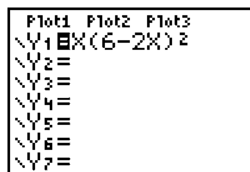
函数的单调性是一个重要的函数性质. 有经验的老师们一定清楚, 高中函数单调性的教学一定要处理好"数"与"形"在概念学习过程中作用和地位. 在本案例中, 图形计算器的作图功能得到充分利用, 同时函数单调性的教学也实现了"从问题中驱动".

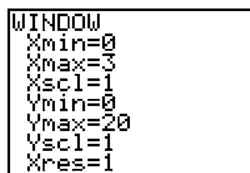
1. 问题驱动函数单调性概念的生成

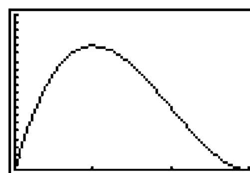
师: 让我们来回顾这个曾经研究过的问题: 一张边长为6厘米的纸片, 在四个角上都剪去一个边长为x厘米的小正方形. 写出折成的长方体的体积与小正方形的边长x之间的关系式.

生: (思考后回答) $y = x(6-2x)^2$, 定义域为 $(0,3)$.

师: 好, 现在让我们利用图形计算器来观察该函数的图象(操作并演示).







师: 请同学们仔细观察该函数的图象, 并用自己的语言描述该图象变化趋势有何特点?

生: 图象先上升, 后下降(其他同学赞同).

师: 那么如何用数学语言更精确地刻划这种特点呢?

生: ……

师: 不妨让我们分别进行研究. 如果我们先从区间 $[0,\ 1]$ 中任取一段区间记作 $[a, b]$, 请问这一段区间上图象有什么特点?

生: 图象上升.

师: 自变量的变化与函数值的变化之间有什么关系?

生: 函数值的变化随着自变量的增大而增大.

师: 很好. 这是我们的直观认识, 它所体现的就是函数在这个区间递增. 哪位同学能进一步利用数学符号语言来抽象地表述一下"函数在这个区间递增"吗?

生: 取x_1、x_2, 且$x_1 < x_2$, 都有$f(x_1) < f(x_2)$!

师: 不错. 同学们, 你们认为他的归纳完善吗(学生不置可否)?

师: 我们来举个例子. 对于函数$y = x^2$, 当$x = -1$时, $y = 1$; 而当$x = 3$时, $y = 9$. 符合刚才这位同学的描述, 但你们觉得能说函数$y = x^2$是增函数吗?

生: 不能.

师: 哪位同学可以对这位同学的表述加以完善?

生: 在给定区间内任取x_1、x_2, 且$x_1 < x_2$, 都有$f(x_1) < f(x_2)$!

师: 很好. 符合这种性质的函数, 我们一般称之为增函数. 下面让我们来看一下增函数的严格定义: ……

点评: 函数单调性的概念可以逐步从问题中抽象出来, 这也是学习函数性质的重要方法. 教师为学生创设了熟悉的纸盒问题背景, 并从熟悉的问题中导向了新问题的探究. 应当说, 这个设计是很有新意的, 而纸盒模型是个三次多项式函数, 在定义域内也具有递增和递减区间. 因此, 对于单调性概念的引入, 这个模型和二次函数的传统引进概念的方法是完全一致的. 图形计算器在这个环节只是起到作出图象供观察研究的作用, 也为下一个精彩的环节作了一个伏笔.

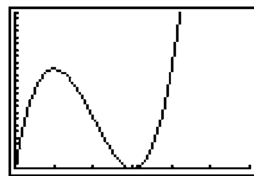
2. 体验函数单调性概念的研究价值

师: 我们通过一些最基本的例题熟悉了函数单调性的概念和判断方法. 现在让我们回到纸盒问题中得到的那个函数. 如果我们放宽定义域的限制, 你们是否能猜测一下函数$y = x(6-2x)^2$在区间$(1, 6)$的单调性如何?

生: (在座位上纷纷发表观点) 单调递减……不确定……好像先递减后递增…….

师: 我看同学们大多是凭感觉在猜, 有没有办法验证呢?

生: (不假思索地) 用图形计算器再看一下不就行了? (通过观察调整后的窗口) 的确是先递减再递增.



师: 好! 我们有了图形计算器, 似乎可以用图象来判断单调性了, 是不是比定义简单多了?

生: (很积极地附和) 对啊, 对啊!

师: 那么, 我想继续问一个问题: 函数$y = x(6-2x)^2$在区间$(3, +\infty)$上的单调性如何?

生: (有点疑惑地) 好像在区间$(3, +\infty)$上函数是单调递增的吧?

师: 你能不能确定呢? 图形计算器能不能帮助你下结论?

生: (陷入了沉默) …… 看来一定要用定义才能证明了吧?

……

点评: 这段教学细节是教师特意针对计算机或图形计算器而设计的. 对于函数$y = x(6-2x)^2$, 教师引导学生研究在不同定义域范围内函数的单调性. 在预见到学生可能会不自觉地依赖图形计算器的时候巧妙地揭示了技术的局限性! 单调性是函数的一个局部性质, 它一般在函数定义域的某个子集中加以研究. 虽然图象能十分直观地揭示单调性, 而且将初中学习的知识作了提升, 但单调性的定义的严谨性和概念学习的必要性容易被技术所掩盖. 教师的设问体现了教学目标中所强调的两个方面:

1. 强调不能光从函数的局部图象臆想函数的单调性, 突出利用单调性定义的严谨性;

2. 强调单调性更加体现函数的局部性质, 研究时应重视以给定的区间作为前提;

3. 强调技术只是"参与学习"的手段, 对概念的深刻认识才是学好数学的有效方法.

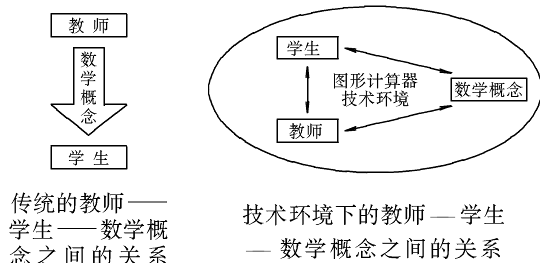
从这个案例我们也可以体会到: 图形计算器乃至许多现代信息技术在课堂教学中的应用都是为促进学生学习为目标的. 尽管它们大多数时候能有效地提高教学效益, 但技术应用本身依然是一把"双刃剑". 在数学的概念教学中若处理不当, 也会削弱学生对数学概念的

掌握. 当教师启发学生研究区间趋向无穷的函数单调性时, 不仅有效地说明了技术在数学学习中可能的局限, 更突出了概念学习的重要性. 这种教学策略对学生学习动机的驱动而言,显得十分有效. 通过这个片断也体现出这样一个事实: 技术的引进也为教师创新带来了契机, 在技术环境下的教学, 的确有一片等待我们去研究和开拓的空间.

上述两个案例都是在图形计算器应用的背景下, 对于数学概念教学的一种设计与实践. 一旦教师选择了计算器参与教学, 就应当更新教学方式、重构教与学的过程, 然而我们又不能因此忽略或淡化学生对于数学概念本质的学习. 为此, 笔者觉得图形计算器在数学概念教学中的应用可以从以下两个角度加以归纳:

(一) 图形计算器在数学概念课教学应用中的定位

图形计算器在数学概念课教学中所起的作用应当立足于"参与教学"和"促进学习". 在它设置的"场"中, 技术的优势和技术本身的局限都会成为教学设计中的关注点. 数学概念课在我国一代代数学教师的"锤炼"之下, 在传统的课堂中已显得十分"完善", 但技术介入之后这种平衡被打破. 教师(尤其是擅长技术的青年教师)往往将技术应用作为教学设计中所要思考的首要问题, 而忽略了教学的核心内容, 也就是数学概念本身.



传统的教师——学生——数学概念之间的关系　　技术环境下的教师 — 学生 — 数学概念之间的关系

若采用结构图分析的话, 传统的教学重视数学概念从教师向学生传递的过程. 在新的教学理念下, 教学的核心仍然是教师——学生——数学概念的关系, 然而突出了学生的主体地位下, 而现代信息技术的良好环境为三者间新型关系的形成创造了空间.

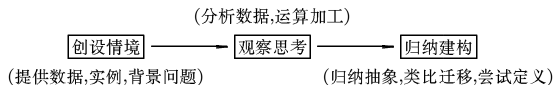
同时, 在图形计算器环境下, 学生的学习时空可以被有效拓宽. 学生可以不再依赖于教师, 新型的师生关系可以促进学生学习方式的转变. 同时, 数学概念本身也会受到新型的学法和教法的改造, 这也必将形成技术和概念之间的有效整合.

(二) 图形计算器在数学概念课教学应用中的原则

要正确把握图形计算器在数学概念课教学中的应用, 大致需要把握好两个基本原则:

1. 概念中心原则. 在数学概念课的教学中, 现代技术的正确应用一般是围绕着教学目标和学习者而展开的. 学生是否能正确掌握数学概念, 应当始终成为概念课教学的基本评价原则之一. 图形计算器在概念教学中的应用应当促进学生对数学概念的理解. 教师在教学之前拟定教学目标时就必须明确概念课的教学目标, 然后才能正确地运用图形计算器等技术手段. 在先前的案例中所体现的一些片断都是为了促进学生完善概念的建构或更好地理解概念本质而设计的.

2. 主体探究原则. 数学概念的建构观点是目前课程改革的理念所提倡的. 虽然中学数学的概念课教学, 教师的指导作用十分明显, 但是以学生为主体的概念建构过程是包括图形计算器在内的任何技术手段都不能替代的. 概念课教学设计中, 教师需要预见学生思维中的建构过程, 发挥图形计算器在功能方面的特点, 让技术起到促进思维, 完善建构的作用.在案例中, 对于一些数学概念, 教师在合理发挥技术优势的前提下引导学生自主地建构定义. 教学设计中, 比较典型的呈现形态如下图所示:



在遵循主体探究的原则下, 师生在互动交流和技术应用的环境下才能有效实现"与技术共同学习"的目标. 学生的主体探究, 往往还会使教学呈现更多的开放空间, 对于拓展学生的学习时空效果显著.

数学教育研究的目的和方法

200062 华东师大数学系硕士研究生 潘玮炜

在面临课程改革的今天, 越来越多的人从事数学教育研究. 然而数学教育研究的目的何在? 数学教育可以回答什么样的问题? 怎样的回答才是合理的? 什么样的证据才能支持你的观点? 如何收集这些证据? 数学教育中的理论和模型是怎样的? 如何评价这些模型和理论? 有很多人试图用数学研究的观点和方法来做数学教育研究. 本人在读完美国数学家、数学教育学家舍恩菲尔德的这篇原著后受益匪浅, 于是试着将之编译出来和大家一起分享.

一、数学教育研究的目的

数学教育研究主要有两个目的: 其一, 理解数学思维、数学的教和学的本质; 其二, 运用这种理解来改善数学教学. 这两个目的是相辅相成, 同等重要的. 正如医学研究和临床实践, 以长远的目光来看, 这两种研究是缺一不可的.

然而事实并非如此, 人们往往更重视第二个目的. 比如, 一些数学家经常会问: “什么在课堂教学中起作用?” 提出这类问题说明那些数学家对一些抽象的教育理论不感兴趣, 他们关心的只是在实践中有直接应用的那部分理论. 当然, 教育研究者必须要提供一些有用的结论, 但是, 如果认为可直接应用的理论 (如课程开发等) 是数学教育研究的根本所在, 那就错了.

二、数学教育研究能够回答的问题

数学家们提出的最典型的问题是: “什么起作用?” “哪种方法更好?” 而这类问题从原则上来说恰恰是无法回答的. 人们对“什么起作用?” 的看法见仁见智. 下面有几个例子.

教师们经常会问一个问题: “实施大、小班教学, 效果是否相同?” 这是不能概而答之的. 评判大小班教学效果的好坏取决于人们对不同结果的重视程度: 学生在课堂上的参与度如何? 学生对课程的感觉是否重要? 是否关心有多少学生对后续课程感兴趣? 上述各问题孰轻孰重每个人的看法都不一样, 那么对教学效果好坏的回答也会众说纷纭.

“哪种方法更好 (最好)?” 这个问题不像看起来那么简单. 以历史上微积分教学改革为例: 1990年代中期, NSF(the National Science Foundation) 的官员们确信微积分教学改革是卓有成效的, 并且认为应该把微积分教学改革作为其他内容改革的典范. 于是, NSF 召集了参与微积分教学改革的数学教育研究者, 并提出如下问题: “我们能否证明改革后的微积分是优于传统微积分的?” 他们基本的想法是通过某种形式的测验来显示改革的优越性. 然而如何设计测验? 如果测验是传统的那种侧重于符号运算技能的, 那么接受“教学改革”的学生就处于劣势, 因为他们并没有练习那种计算技能. 如果测验是那种依赖于技术的或建模占很大成分的, 那么传统教学的学生就处于劣势, 因为技术和建模在他们的课程中所占的比例不大. 因此, 两者是不具备可比性的, 无论采用哪种方式, 仅仅通过一次测验然后比较分数这是不公平的.

总之, 一些看上去自然而然会提出的问题, 由于某些原因, 是无法回答的. 既然如此, 那么数学教育可以研究的到底是哪些类型的问题? 以下是数学教育研究的一些基本贡献:

∗了解思维、学习和教学的一些理论观点;

∗认知方面的描述 (如数学化的思维, 学生对函数、极限等概念的理解和误解);

∗存在性证明 (如学生能够学习问题解决、归纳、讨论的证据; 各种教学形式可行性的证据);

∗各种教学形式(正面和负面的)的效果描述.

三、数学教育的理论、模型

当数学家们提及“理论”和“模型”时, 往往对于其性质和支持理论的证据已了然于心. 然而, 在生命科学和社会科学中, 我们以不同的方式来使用上述两个术语, 这可能和教育学中的用法更为接近. 下面我们就表1所示的例子展开讨论:

表 1

学科	数学、物理学	生物学	教育学、心理学
理论	方程论;引力论	进化论	心理论
模型	热传导模型	捕食者和被捕食者的关系模型	问题解决模型

在数学里, 我们首先明确地提出理论(如方程论或复变量论), 然后用逻辑分析的方法来证明结论的正确性. 在经典物理学里, 模型通常是近似的, 得出结论的过程却要求是精确的. 比如, 在模拟一个层状板的热传导时, 我们必须指定原始边界条件和热传导的条件, 然后来解相关方程. 简而言之, 在过程中没有任何模棱两可之处: 确定地描述问题, 用数学证明来评断其正确性. 这样得到的理论和模型可以用来预测, 事实上, 这种预测也可反过来检验理论的正确性.

在生物学中, 问题要复杂得多. 比如, 进化论, 生物学家们大体认为进化论是正确的, 但是支持进化论的证据和数学或物理学中的证据大不相同. 我们无法用数学的方法来证明进化论的正确性, 借用波利亚的一本书名,“合情推理”才是支持这个理论的方法所在. 事实上, 生物学家们也曾说过:“我们找不到一个证据可以说明进化论是错的, 然而与之相符的证据却堆积如山, 也没有相对的假说可以和已有的证据都匹配.”

总之, 生命科学、数学和物理学中的理论和支持理论的证据是明显不同的. 数学教育研究中的情况类似于物理学和生命科学.比如“心理论”提出: 某些心理组织以独特的方式运行, 其中一种设想是我们有各种记忆, 如工作记忆或“短时”记忆. 根据这个理论, 人们所想的东西被短暂地储存在工作记忆中, 更有趣的是这个理论还提供了工作记忆的一个限制: 在同一时间内, 人们无法在工作记忆中储存9个以上“组块”的信息.

为了说明上述理论可能是正确的, 我们可以试着闭上眼睛来做 379×658. 大多数的人都会发现这很困难. 这是因为在计算中, 人们要记忆的原始数据和各步骤中产生的数据已经超过了9个组块. 如果人们不断默记每小步得到的和, 那么可能可以更好地完成任务. 如: 你可以先计算 $8 \times 379 = 3032$, 然后默记3032直到它成为一个组块, 只占据工作记忆中的一个空间(一个寄存器), 这样就给其他的计算留出了足够多的空间. 通过这种方式, 人们可以超越工作记忆的极限.

假设上述理论是正确的, 然而并没有确实的证明来支持它. 首先, 即使工作记忆寄存器确实存在, 研究者也不可能在一个人的大脑中找到它们. 其次, 支持该理论的证据并不可靠. 这正如进化论, 人们找不到一个证据与进化论相抵触, 但还是无法用数学里那样的方式来证明它的正确性.

四、数学教育研究的方法

由于篇幅关系, 在本篇论文只是想谈一下标准实验研究.

这种研究方法源于中世纪的一个农学研究的例子. 基本想法是这样的: 针对两块种有某种特定庄稼的土地, 控制其他变量完全一致, 只改变一个变量, 那么土地上庄稼的不同就应归因于那个变量的不同. 很自然地, 人们深信这种方法可迁移到教育中. 如果想要证明某种新的教学方法更好, 那么就可以做这样一个实验: 将学生随机地分成两组, 一组用普通的方法教学, 另一组用新的方法教学. 假定可以设计一次对新老方法都公平的测验, 测验时如果后者做得更好, 那么就可以证明新教学方法更优越. 然而, 这其中有很多潜在的问题, 如果两个组的执教老师不同, 那么结果的差异就可能归因于老师教学的差异. 即使是同一个老师, 也会有各种差异, 如老师可能会有精力和行为上的差异; 学生可能讨厌作为实验对象; 又或者

其中一组的学生可能知道他们正接受一种新的试验性的方法. 单单后者就可能导致迥异的结果. (有大量的文献说明如果人们感到施加于他们的改变是积极的, 那么他们将力图做得更好——不管这种改变是否真的如此).

简而言之, 经典实验方法应用于教育研究是困难重重的. 真正说起来难处有二: 第一, 要做到医学程度上的双盲实验 (医生和病人都不知道谁接受了真正的治疗, 而谁只是采用了安慰疗法) 很困难; 第二, 难以准确控制一些实验变量. 基于此, 不论是正面的还是负面的结论都难以解释. 当然这并不表明这种实验研究无效, 或者说大规模的统计工作毫无意义. 而是说, 在做实验和下结论时我们都要非常的谨慎!

如上所述, 教育研究结论的证明不同于数学结论的证明. 也有别于物理学, 在教育研究中很难直接运用实验或统计的方法, 因为在教育研究实验中"完全一样"的条件是很难控制的.

五、数学教育理论的评价标准

数学教育研究中有很多的结论和方法. 但是, 对某个特定的结论我们应持怎样的信任度? 什么样的证据才是可信的? 下面罗列了一套针对数学教育模型和理论的评价标准:

描述效度

描述效度是指一个理论关于现象本质描述的广度. 比如, 心理、问题解决或教学理论应包含心理、问题解决和教学的主要方面. 简单地说, 我们应该要考虑这些问题: 有没有遗漏的东西? 与现象相对应的理论元素合理吗? 比方说问题解决研究, 我们通常会进行一些访谈或课堂教学实录. 当有人在看相关分析或录影带时是否会发现你未发现的东西?

解释效度

解释效度是指解释事物运行的方式及原因. 既要指出人们能否完成某些任务, 又要解释其原因. 比如, 心理理论指出了人们在心算两个三位数乘积时会有困难, 但如果只涉及这些, 人们将无法了解困难是如何产生的以及之所以产生的原因. 因此, 完整的工作记忆理论就应该包含有关记忆寄存器的说明、组块的详细解释、每个记忆成分相互作用的示意图. 理论的解释效度应该达到这样的水平: 合理准确地指出理论中所涉及的物体及其相互关系, 以及这种关系如何产生, 为什么一些关系可能产生, 而另一些则不可能.

范围

范围是指理论所涵盖的现象的范围. 如果方程论只涉及线性方程, 那么这个理论不会令人印象深刻. 同样地, 如果教学论只涉及注入式教学, 也会给人空洞贫乏之感.

预测效度

预测的重要性是显而易见的: 检验理论的标准之一就是看在事情未发生之前, 理论能否给出明确的说明, 就如进化论. 当然, 教育学、心理学中的预测和物理学中的又不一样. 事实上, 没有任何一个教学理论可精确预测出老师在各种情况下的行为; 人类的行为是不可预测的. 然而, 教学论和进化论一样, 可以提示类似事件是否发生.

同时, 预测又可以完善理论. 当理论告诉我们什么是不可能发生的, 偏偏它却发生了; 又或者理论一再地告诉我们什么是很有可能发生的, 然而事实并非如此, 那么这个理论就有问题! 因此, 预测是完善理论的重要工具, 尽管有些情况下, 我们无法作出准确的预测.

严密和特殊性

建构一个理论或模型就必须要详细说明其中包含的事物和事物间的相互关系. 这套抽象的事物和关系大致相对于现实世界中的某些事物和关系. 教育研究者要尽可能地令理论更明晰和特殊化, 努力在理论可能出问题的地方寻找反例, 达到进一步完善理论的目的.

可证伪性

因为经验可检测理论所阐述观点的正确性和预测的精确性, 所以理论应具有可证伪性.

可重复性

理论的可重复性与该理论是否严密而特殊是紧紧相连的. (1) 如果情境相同的话, 同样的事会发生吗? (2) 如果接受适当的培训后, 不同

数学开放题的SOLO分类评价法及其运用

200062 华东师范大学数学系博士研究生 李祥兆 200052 上海市复旦初级中学 赵志英

开放性问题以不确定性、发散性、探究性及生成性为基本特征在各种考试题型中独树一帜. 随着课程改革的进一步深化, 开放性问题已成为数学教育改革的一个亮点和热点. 与封闭性问题相比, 开放性问题是一种没有固定答案或唯一结论的问题形式, 它在很大程度上弥补了封闭性问题的种种不足, 特别在考查学生灵活性和广泛性, 考查学生的实践能力和创新意识, 以及情感、态度、价值观等方面有着封闭性问题所无法取代的优点. 开放性更符合新课程发展性评价理念, 在新课程的学业成绩评价中应大力加以提倡. 但从以往的数学考试来看, 虽然增设了一些开放性问题, 这些题目以考查学生的创新能力为目的, 但评价还是依据"采分点"来打分. 这种方法有利于确立思维能力培养的目标, 却无法确立思维能力培养的层次. 因此, 在评价上难以拉开学生的差距, 达不到考查的目的, 失去了考查的初衷. 这一问题不解决, 开放性问题就难以进入学业成绩评价, 特别是大规模的学业成绩评价之中. 为了促进有关开放性问题的评分方法的研究, 本文结合数学教学的实际, 介绍一种测量学生高级

~~~~~~

的人能否从相同的数据中看出同样的事? 对于这两个问题的回答都依赖于理论的精确定义. 下面是一个非常经典的案例.

美国著名的教育心理学家奥苏贝尔曾提出"先行组织者"理论: 在呈现教学内容之前, 先呈现一些密切相关又容易理解的引导性材料, 将会大大提高学生的理解力. 但是在之后的十年、二十年内, 许多关于这个主题的研究和文献都未得出上述结论. 直到近期, 一些研究才揭示了原因: 该理论中最关键的术语"先行组织者"的定义下得不够精确. 不同的研究者对此有不同的理解, 因此每个研究者设计的引导性材料都基于他们自己的想法, 这就难怪研究结果是不得要领的!

证据的多重来源性

我们在数学和数学教育学之间又找到一处不同, 在数学中, 只需要一个证明就足以说明结论是正确的; 而在教育学和社会科学中我们要寻找多重的证据. 事实上, 有些证据是误导人的, 有些情况只是由环境造成而非一般的固有的现象. 我们可以通过改变环境、寻找尽可能多的信息来源来判断某些行为是否经过加工. 比如, 在模拟教学研究中, 为了推断老师的实际行为, 我们不仅进行了教师行为实录, 还与老师进行了访谈, 回顾他们的课堂计划. 总之, 证据的来源越多样, 得出的结论就越可靠!

本篇文章旨在指出数学与数学教育的不同. 数学教育的结论很少是确定的, 往往只是提供建议而已. 证据也不是按照证明顺序排列, 而是不断积累, 可信地支持结论. 我们不要试图在这个领域中寻求确定的答案, 而是要体会其中的思想. 数学教育研究领域是一个很年轻的领域, 我们还有很长的路要走. 每个教育研究的从事者和读者都应该是一个怀疑论者, 当有人告诉你某个理论一定成立时, 请务必要当心! 总之, 在今后的几十年内, 我们仍要致力于理论和研究方法的开发, 使得这个领域变得更坚实更具有应用性!

参考文献

[1] Alan H. Schoenfeld, Purposes and Methods of Research in Mathematics Education.
~~~~~~

思维为目的、可运用于开放性问题的质性评价方法——SOLO分类评价法, 希望能够引起广大师生的兴趣, 更希望能够给课程改革背景下的学生学业评价提供新的视角和方法.

一、SOLO分类评价法的基本观点

SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome, 英文缩写为SOLO) 分类评价法由毕格斯[1]教授首倡, 是一种以等级描述为基本特征的质性评价方法, 已在澳大利亚和香港等地区做过广泛的实验和应用. SOLO分类评价法的基本理念源于皮亚杰的认知发展阶段论. 皮亚杰的认知发展阶段论指出, 学生在具体知识的学习过程中, 都要经历一个从量变到质变的过程, 每发生一次跃变, 学生对于这一种知识的认知就进入更高一级的阶段, 可以根据学生在回答问题时的表现来判断他所处的思维发展阶段, 进而给予合理的评分.

SOLO将学生学习的结果由低到高分为五个不同的层次, 即: 前结构、单一结构、多元结构、关联结构、拓展抽象结构. 这五种结构的基本含义如下:

♦ 前结构: 没有形成对问题的理解, 只能采取非常简单的方法尝试解答;

♦ 单一结构: 回答问题时, 只能联系一个特征, 找到一个线索就立即跳到结论上去;

♦ 多元结构: 回答问题时, 能联系多个特征, 但未形成相关问题的知识网络;

♦ 关联结构: 回答问题时, 能够联想多个相关特征, 并能将多个事件联系起来;

♦ 拓展抽象结构: 回答问题时, 能够进行抽象概括, 结论具有开放性, 使得问题本身的意义得到拓展, 这一层次的学生表现出很强的创新意识.

SOLO的五种层次代表了学生对于某项具体知识的掌握水平, 从学生对某个问题的回答中, 教师可以对照上述标准就学生对该项知识内容的掌握情况做出判断. 因此, 这种评价方式可以帮助教师进行教学诊断, 同时, 也可以向学生提供有用的反馈, 所以SOLO分类可以用于形成性的学生学业评价; 另一方面, 如果将上述五个层次赋予不同的等级分数, 那么学生对问题回答的质量就可以被量化, 量化的分数可以作为终结性评价的依据.

二、如何运用SOLO分类法对数学开放题进行评分

依据SOLO编制评分标准, 就是按照学生在具体学习任务中的行为表现, 进行诸如前结构、单一结构、多元结构、关联结构和拓展抽象结构的水平划分, 并对各个等级作出文字描述. 若试题用于大规模考试, 则还可以考虑按照实际评分的要求, 将五个等级适当细化. 以下是依据SOLO的基本思想进行等级评分的两个实例, 从中我们可以了解基于SOLO的评分标准编制的一般方法.

例1 如图1所示, 用火柴摆成框形图案, 4根摆1个框, 7根摆两个, ⋯⋯ 等等. SOLO理论认为各结构层次的学生能够回答的问题如下:

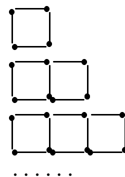


图 1

(1) 单一结构: 摆3个框需要多少根火柴?

单一结构的回答只需运用一种策略, 即看看题图的相关部分, 数一数火柴的根数即可.

(2) 多元结构: 摆5个框比摆3个框多用多少根火柴?

多元结构的回答需要学生做三件事: 计算摆5个框需要多少根火柴, 再数一数摆3个框需要多少根火柴, 最后计算两者的差, 所有这些计算都需要对问题的基本理解, 但不必理解问题的整体结构.

(3) 关联结构: 用31根火柴能摆多少个框?

关联结构水平的学生必须理解到: 摆第一个框需4根火柴, 但以后每摆一个框就要利用前框中的一根火柴, 所以每加一框只需用3根. 这样, 可以取31根火柴中的4根摆成第一个框, 剩余部分用3去除, 得到9, 所以最终答案是10.

(4) 扩展抽象结构: 如果摆成了n个框, 则用去了多少根火柴?

扩展抽象反应则避开具体数字, 直接归纳出一般结论. 在这个水平上, 学生可能会产生几种不同的解法:

♦ 摆一个框要4根火柴, 以后每增加一个框增加3根火柴, 则n个框需要$3(n-1)+4$;

♦ 摆一个框横着需要上下各1根, 竖着需要左右各1根, 摆二个框横着需要2×2个, 竖着需要$2+1$个, 依此规律, 则n个框需要$2n+(n+1)$;

♦ 摆一个框先竖着放1根火柴, 再放其他3根火柴; 摆2个框只需要在第一个框的基础上再增加3根, 依次类推, 则n个框需要$3n+1$.

基于以上分析, 答对第一个问题就达到单一结构的水平, 可以记为D; 答对第二个问题就达到多元结构的水平, 可以记为C; 答对第三个问题就达到关联结构的水平, 可以记为B; 用任何一种方法答对第四个问题就达到拓展抽象的水平, 可以记为A.

这种记分方法简捷明了, 能够清楚地看到学生所达到的思维层次, 非常有利于教学诊断, 可以为教师和学生提供有益的反馈信息, 对于过程性评价尤为适用. 但如果在终结性的考试与评价中使用这种评分方法, 也可以给各个等级赋予一定的分值, 五个等级可按照0、1、2、3、4打分, 教师依据学生达到的等级水平给出相应的分数.

例2　怎样的两个数和, 它们的和等于它们的积?[2] 运用SOLO分类评价法, 学生回答此问题的思维层次依次是:

(1) 单一结构: 想出一个答案, 如$(2,2)$.

(2) 多元结构: 想出两个或多个答案, 如$(2,2)$、$\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$、$\left(\frac{3}{2},3\right)$、$\left(\frac{5}{4},5\right)$等.

(3) 关联结构: 想出多个答案, 并能注意到它们之间的关系, 如通过对这几组数$(2,2)$、$\left(\frac{3}{2},3\right)$、$\left(\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right)$、$\left(\frac{7}{2},\frac{7}{5}\right)$的观察发现: 这两个数的分子都相同, 分母之和等于分子. 根据此发现可以写出更多的答案.

(4) 拓展抽象结构: 能够进行抽象概括, 归纳出一般结果. 对于本题, 也有几种解法可视为拓展抽象结构水平:

♦ “归纳、猜想、证明” 法. 根据对多个答案的观察, 归纳出一般的规律, 并得到通解$\left(\frac{a+b}{a},\frac{a+b}{b}\right)$, 而且能够给出如下证明:

$$\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=(a+b)\frac{(a+b)}{ab}=\frac{a+b}{a}\times\frac{a+b}{b};$$

♦ “主元思想”法. 这种方法是直接避开具体数字, 设这两个数分别为(x,y), 由条件可知, $x+y=xy$, 解这个不定方程, 得到通解$\left(x,\frac{x}{x-1}\right)$;

♦ “韦达定理”法. 由两数和与两数积联想到韦达定理, 所求两数为一元二次方程$x^2-tx+t=0$的两个根, 根据求根公式得通解: $\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4t}}{2},\frac{t-\sqrt{t^2-4t}}{2}\right)$.

(5) 更高级的拓展抽象水平: 在以上拓展抽象的基础上, 能够注意到三种解法的一致性, 并从数学的美感考虑, 把以上三种结果进一步抽象概括为统一表达式$\left(1+x,1+\frac{1}{x}\right)$:

即当$x=\frac{b}{a}$时, 这就是第一个通解;

当$x=a-1$时, 这就变成了第二个通解;

当$x=\frac{t+\sqrt{t^2-4t}-2}{2}$时, 这就是第三个通解.

基于以上五种结构水平, 此题的评分标准可定为: 答案符合单一结构的, 记为D; 答案符合多元结构的, 记为C; 答案符合关联结构的, 记为B; 答案符合拓展抽象结构的, 记为A, 如果给出两种或三种答案, 也可分别记为A1、A2、A3; 如果能够达到更高级的拓展抽象水平, 可以记为A+或A++.

通过这个实例的分析, 可以看出, SOLO的等级数不必限于5个, 可以有多个等级, 各个等级之间还可以有过渡的等级, 可以记为C、C、B、B、A、A、$\cdots$; 如果有更高的等级, 则可以记

(下转第11–49页)

应用题教学中数学阅读能力培养

610031 四川省成都铁二院中学 申烨晖

阅读完《数学教学》2004年第10期田中老师写的《关于应用题教学与应用意识培养的思考》一文后, 感触颇多. 尤其是对田老师关于"应用意识培养是否和应用题呈现方式有关的讨论"中的问题, 在具体的教学中, 学生有明显的反映, 感到题目文字叙述冗长, 数量关系复杂, 难读懂题意, 从而放弃学习. 所以, 接着田老师的文章, 我想谈的是:应用题的表述方式对学生应用意识肯定会产生影响, 教师在教学中应重视引导学生对问题所反映的实际背景的领悟.

一、形成问题的原因

除了田老师所提及到的诸多原因外, 还有一个重要原因, 由于长期的应试教育模式下导致的学科隔阂, 许多数学教师在教学时片面地认为阅读能力的培养是语文学科的任务, 缺乏课程整合的观点, 很少针对学生的数学阅读能力进行培养.

事实上, 语文教学中的阅读理解和数学教学中的阅读理解是有区别的, 数学的阅读是语文教学中阅读能力的迁移和提升. 下面我们比较一下语文说明文的阅读理解和数学应用题的阅读理解.

从医学角度分析, 噪音往往能引发身体的疲劳和不适, 对人的心理也造成一定的伤害.

60分贝以下的噪音一般不会引起人的厌烦. 假如在超过70分贝噪音的环境中, 想要更好地休息, 就得服用镇定剂或安眠药. 当然, 75分贝的噪音属中等级别, 它能影响人的思想和情绪. 在我们生活的环境中, 常有一些尖利的噪音, 它们虽然比较短暂, 但是其激烈程度可以严重干扰人们的生活. 例如:摩托车在行驶中的噪音可以达到100——110分贝, 其强度超过电锯锯木头发出的声音; 摇滚乐队的某些演奏可能产生140分贝的噪音, 大大超过喷气式飞机降落到距地面100米时产生的轰鸣. 科学实验表明, 超过115分贝的噪音能引起人的严重的烦躁和不安, 在这种情况下相当于癫痫病发作时的一系列大脑变化; 面对160分贝的噪音, 动物有可能死亡.

……

1. 本文主要说明了________________.

2. 作者是按照什么顺序来安排第二段内容的? 这样安排有什么好处?

3. 下列句子中, 删去画线词语后对原句意思表达影响最小的一项是……………………( )

(A) 常有一些尖利的噪音, 它们虽然<u>比较</u>短暂, 但是其激烈程度可以严重干扰人们的生活;

(B) 摇滚乐队的<u>某些</u>演奏可能产生140分贝的噪音, 大大超过喷气式飞机降落到距地面100米时产生的轰鸣;

(C) 面对160分贝的噪音, 动物有<u>可能</u>死亡.

例1 (2004年江苏徐州市中考题)

我市某乡规定:种粮的农户均按每亩年产750公斤, 每公斤售价1.1元来计算每亩的年产值. 年产值乘农业税的税率就是应缴的农业税, 另外还要按农业税的20%上缴"农业附加税"("农业附加税"主要用于村级组织的正常运转需要).

(1) 去年我市农业税的税率为7%, 王老汉一家种了10亩水稻, 他一共要上缴多少元?

(2) 今年, 国家为减轻农民负担, 鼓励种粮, 降低了农业税, 并且每亩水稻由国家直接补贴20元(可抵缴税款). 王老汉今年仍种10亩水

稻, 他扳指一算, 高兴地说:“这样一减一补, 今年可以比去年少缴497元.” 请你求出今年我市的农业税的税率是多少?

从上述两个例子可以看出, 语文阅读能力是最基本的, 是作为基础学科的要求, 是以发展学生的语言智能为出发点, 进一步进行辨识、理解等活动. 但是, 要想让学生读懂数学应用题, 仅仅依靠语文对阅读能力的培养是远远不够的, 它除了要求学生在进行语言智能的辨识、理解等活动外, 还必须进行数学逻辑智能方面的比较、分类、排序、推理等活动. 所以, 我们必须针对数学学科自身特点, 在语文阅读能力的基础上, 培养学生的数学阅读能力.

二、问题解决

数学应用题的解答是一个复杂的过程, 要求学生综合地、创造地运用各种数学知识解决非单纯练习公式的(非常规性)问题. 具有参与性(有问题情境, 学生愿意接受)、非常规性(能引起思考, 学生不能靠简单模仿或套用公式直接解决)、开放性(解题策略多元化)、探究性. 下面结合例1具体谈一下如何培养学生的数学阅读能力.

教师通过设置问题引导学生思考:

问题1　第一个问题要我们解决什么? 这个问题由哪些方面组成?

问题2　题目中哪些语句与农业税的计算有关? 哪些语句与农业附加税的计算有关?

问题3　将你找到的语句重新组成两个简单的应用题, 进行解答.

问题4　第二个问题与第一个问题比较, 哪些条件改变了? 哪些条件没改变? 通过没改变的条件, 你能得到什么结论?

问题5　什么导致农业税的降低? 降低后的农业税又如何表示? 农业附加税发生了怎样的变化?

问题6　直接补贴的20元使上缴的税款增加了, 还是减少了?

上述这些问题可以促使学生发生如下思维活动:

过程1　在学生阅读完题目后, 由问题入手, 首先看问题1要我们解决什么, 解决这一问题由哪些方面组成. 它由农业税和农业附加税两个数量相加. 然后让学生寻找与这两个数量级有关的语言.

过程2　与计算农业税有关的信息有“年产值乘农业税的税率就是应缴的农业税”, “去年我市农业税的税率为7%”. 对于“种粮的农户均按每亩年产750公斤, 每公斤售价1.1元来计算每亩的年产值.” 这些信息由于没有涉及到农业税的文字表述, 学生在阅读过程中最容易忽略; 与计算农业附加税有关的信息有“另外还要按农业税的20%上缴‘农业附加税’ ”.

过程3　让学生将上述寻找结果组成应用题, 转化成数学符号——代数式. 在转化“农业税”这个过程中, 在前一个过程中发生遗漏的学生就会发现, 在进行“农业税＝年产值×7%”的转化时, 由于“年产值”不知道, 所以转化不能进行, 必须先计算“年产值”, 就必须用“每公斤售价1.1元来计算每亩的年产值”这一信息. 有了这个信息后, 学生就需要激活与之有关的自身认知结构中的知识储备, 建立与新信息的联系:“每公斤售价1.1元”是单价, 必须知道数量(多少公斤)才能计算总价(年产值), 用“种粮的农户均按每亩产750公斤, 王老汉一家种了10亩水稻”就可以计算出来. 这些过程看似简单, 但对于还没有学会在阅读中推理和已有的知识经验较少的学生, 仍然是一个需要逐步推理和反思的过程. 有了以上这些思维活动过程, 学生可以成功转化成:农业税 $= 10\times750\times1.1\times7\%$. 对于“农业附加税”的转化较简单, 学生只要根据文字表述列式就可以了.

过程4　题中的第二个问题是在第一个问题的基础上, 其中的一些条件改变了, 一些没有改变. 先需要对信息进行分类, 再根据没有改变的条件解决学生熟悉的“年产值”问题.

过程5　改变的条件有“降低了农业税”, 是什么条件导致了农业税的降低, 这是需要学生进行推理的过程. 只有当学生发现“王老汉今年仍种10亩水稻”这一信息, 才能推出年产值没变化, 是农业税税率变化了, 同时, 进一步

同样的立体感, 不一样的图形

442000 湖北省十堰市第二中学 李盛华

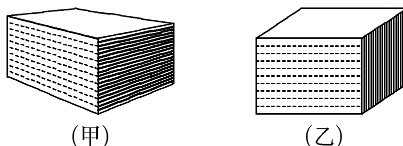
高中数学立体几何中讲到了立体图形直观图的画法, 直观图比较直观, 富有立体感.

我按照课本的体系给学生讲解上述内容时, 学生提出了一个问题: 如图1(甲), 长方体也富有立体感, 为什么跟老师讲的直观图不一样? 原来这位同学学过美术.

被称为现代科学之父的爱因斯坦指出: “提出一个问题往往比解决一个问题更重要, 因为解决一个问题也许是一个数学上的或实验上的技能而已. 而提出的问题, 新的可能性, 从新的角度去看旧的问题, 却需要有创造性的想象力, 而且标志着科学的真正进步.” 我首先表扬了这位同学肯动脑筋, 然后又把问题抛给了这个学生, “回去看看美术书, 问问美术老师, 上网查查资料, 我们共同来找出答案.” 荷兰著名数学教育家弗赖登塔尔指出: “数学知识既不是教出来的, 也不是学出来的, 而是研究出来的.” 只有学生亲自探究出来的知识才真正属于自己, 而且终身不忘.

三天过去了, 这位同学忍不住找我交流对这个问题的收获.

图1(甲)是长方体的透视图, 图1(乙)是长方体的直观图. 美术里经常画透视图, 数学里一般画直观图, 它们都富有很强的立体感.

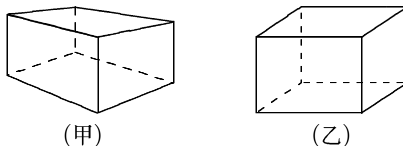


(甲) (乙)

图 1

“什么是直观图? 什么是透视图? 它们有何区别与联系?” 我像一个记者一样提出问题. 学生早有准备, 拿着书, 上面还画有线.

我们看到的自然界物像呈现近大远小的空间关系, 这是由于人的视线会消失在远处的某个点上, 就是透视现象, 应用透视原理(中心投影) 画出来的空间图形就是透视图. 在透视图中, 往往将一些平行线(与视平线既不平行也不垂直) 画成相交线, 即与视平线既不平行也不垂直的所有平行线段延长后交于一点.



(甲) (乙)

图 2

如果我们把人的视线看作是平行的 (即视线的消失点在无穷远处), 那么物体的各平面上的平行线在图中仍是平行线, 这样的图既富有立体感, 又能表达出图形各主要部分的位置

推导农业税降低使农业附加税也降低.

过程6 直接补贴的20元是新增加的内容, 是与农业税和农业附加税不同的第三部分, 它与后两者的关系是什么, 学生要理解信息.

通过上述例题的思维活动的解析, 可以看出, 阅读能力的心理过程包括四个环节:

内化 ⟶ 理解 ⟶ 推理 ⟶ 反省.

在具体教学中, 只有学生的阅读能力提高了, 才能从复杂的环境中抽象出数学模型, 才能让学生意识到数学在实际生活中的广泛应用, 从而培养学生的应用意识. 所以教师应通过针对应用题的阅读的教学, 全面揭示数学阅读活动的过程.

参考文献

[1] 田中. 关于应用题教学与应用意识培养的思考. 数学教学. 2004. 10.

关系和度量关系(主要是长、宽、高三个方面的), 这种投影图叫做直观图. 透视图与直观图都富有立体感, 它们相像但并不相同. 如图2(甲)是透视图, 平行线段的长度和位置关系有了变化, 不易从图中表现线段的长短和它们的位置关系, 同时画法比较复杂, 不易掌握. 如图2(乙)是直观图, 虽然立体感稍差一些, 但容易从图中表现线段的长短和它们的位置关系, 并且画法比较容易.

"你还知道什么?"

高中数学立体几何中讲到了立体图形直观图的画法, 有两种: 斜二侧画法和正等侧画法, 多面体棱柱、棱锥、棱台等的直观图, 一般用斜二侧法画, 旋转体圆柱、圆锥、圆台等的直观图一般用正等侧法画. 图2(乙)是直观图, 是用斜二侧画法画的.

常见的透视有三种: 平行透视、成角透视、散点透视. 绘画里常常画透视图, 平行透视(如图3(甲))只有一个心点; 成角透视(如图3(乙))有且只有两个心点(此时心点也叫余点); 散点透视(如图3(丙))至少有三个心点. 古代名画《清明上河图》是用散点透视画的.

"真了不起! 你知道的比老师还多. 能不能把这些讲给同学们听?"

"当然可以!"

此同学也当了一回小老师, 这是一堂数学课, 也是一堂美术课; 这是一堂知识课, 也是一堂能力课; 这是一堂探究课, 也是一堂创新课.

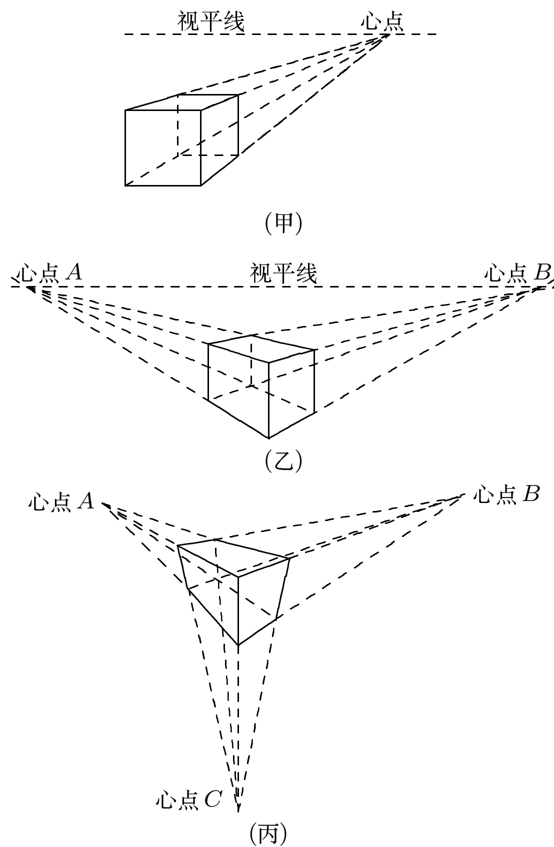


图 3

(上接第11–44页)

$$m(-x_3)+n(x_1-x_3)+p(x_2-x_3)=0,$$

$$m(-y_3)+n(y_1-y_3)+p(y_2-y_3)=0,$$

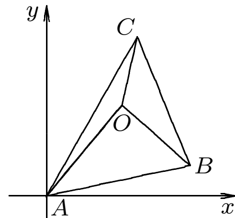


图 3

解出 $x_3=\dfrac{nx_1+px_2}{m+n+p}, y_3=\dfrac{ny_1+py_2}{m+n+p}$.

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_2\cdot\frac{ny_1+py_2}{m+n+p}-\frac{nx_1+px_2}{m+n+p}\cdot y_2\right|$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{m+n+p}|n(x_2y_1-x_1y_2)+p(x_2y_2-x_2y_2)|$$

$$=\frac{n}{2(m+n+p)}|x_1y_2-x_2y_1|,$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|,$$

$$\therefore\ \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{m+n+p}{n}.$$

原文中的解答要添加辅助线, 这要一定的巧思. 这里的解析法绕过这一巧思. 思路清晰, 计算也不难, 恰如原文所说是一条巧妙的途径.

参考文献

1. 李晟. 一道高中竞赛题的探讨与推广. 数学教学. 2005. 4.

在异面直线教学中进行思维训练

310007 浙江大学附属中学(浙江师范大学教育硕士) 王小海

立体几何中, 空间两条直线所成角是一个重要知识点, 但因其概念比较抽象、问题比较复杂而成为学生学习中的一个难点. 下面笔者借助对一道典型例题的剖析, 阐述在数学课堂教学中如何以问题为载体促进信息传递, 如何把握学生的思维过程, 注重思维训练.

问题　已知异面直线AB、CD所成的角为40°, P为空间一点, 则过点P且与AB、CD所成的角都是30°的直线有几条? 与AB、CD所成的角都是60°的直线有几条? 70°、80°呢?

教师: 此问题信息量比较大, 从何处入手?

学生纷纷利用笔、直尺等代替直线在空中比划起来, 同时同桌四人小组的同学聚在一起合作、讨论.

用工具比划和互相讨论是开启思维的好方法, 若要将问题上升到理性思考的高度, 必须对所提供的材料有一个去粗取精的筛选过程和由表及里的深入过程, 因此在点燃思维的火花后, 要及时引导, 直到学生弄清此类概念性问题的本质.

注意到有部分同学在画图, 我请一位学生将图形投影到黑板上, 并请他说一说这样画的理由.

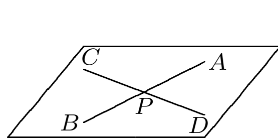


图 1

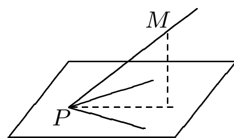


图 2

学生发言:

学生A: 根据异面直线所成角的定义, 可以在空间任取一点, 将AB、CD平移并经过该点, 则他们相交所得的锐角40°就是它们异面时所成的角度. 假设AB、CD相交所确定的平面为a. 题目中要使过某点的直线与这两条原来异面的直线都成30°角, 可不可以根据同样的理由, 把AB、CD的交点P当作题目所要求的空间一点?

学生B: 可以的, 而且为了能够使所求的直线与AB、CD成相等的角, 这条直线在平面内的射影应该是$\angle APD$的平分线.

学生C: 图形的"上部"存在满足条件的直线, 按照对称关系,"下部"肯定也有一条.

学生D: 在这两条直线所在的平面内, PM绕着点P旋转一周, 应该有4条.

学生E: 不对, 因为直线是无限延伸的. 我认为图2只画了一半, 这条PM的射影平分图1中的$\angle APC$也可以.

学生F: 但是, 在这个方向上$\angle APC = 140^\circ$太大了, 做不到都成30°角, 至少要成70°.

……

在已有的知识经验的基础上, 依据自身原有的思维结构, 主动地选择和接受那些与之相适应的外部信息而进行分析、调整和储存, 迂回、间接地寻找解决问题的途径, 在不同观点的相互碰撞中推进思维的探究过程.

归纳、达成共识:

1. 平移异面直线AB、CD后形成平面a, 根据定义$0^\circ < \angle APD \leqslant 90^\circ$, $90^\circ \leqslant \angle APC < 180^\circ$.

2. 如图3、4, 满足条件的直线一定在平面b内, 平面$b \perp$平面a, 且平面b与平面a的交线是$\angle APD$或$\angle APC$的平分线.

3. 由"平面的斜线和它在平面内的射影所成的角, 是这条斜线和这个平面内任一条直线所成的角中最小的角"和 $\cos\theta = \cos\alpha \times \cos\beta$, 可以推得, 图3中$\angle MPD \geqslant \dfrac{1}{2}\angle APD$, 图4中

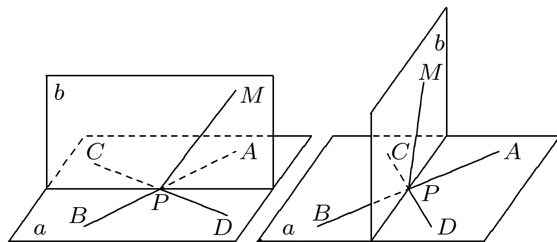


图 3　　图 4

$\angle MPA \geqslant \frac{1}{2}\angle APC$.

按照马克思说法, 它是"移入人脑并被改造过的"东西. 思维的存在形式只有经过由客观向主观、外在向内在的转化, 才能变换成与学生的思维活动自身结构相容的新的思维结构而被储存下来, 成为把握思维方向的重要材料.

初步形成结论:

设两条异面直线所成的角为α, 过点P的直线与两异面直线所成的等角为β(为了简明, 把"过P可作几条直线与两条异面直线成等角β"简称为"可作几条", α、β的含义不再设置, 与前保持一致).

1. 在平面b内 (图3).

β与$\frac{1}{2}\alpha$的大小关系	可作直线的条数
$\beta > \frac{1}{2}\alpha$	2条
$\beta = \frac{1}{2}\alpha$	1条, 即$\angle APD$的角平分线
$\beta < \frac{1}{2}\alpha$	0条

2. 在平面b内 (图4).

β与$\frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$的大小关系	可作直线的条数
$\beta > \frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$	2条
$\beta = \frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$	1条, 即$\angle APC$的角平分线
$\beta < \frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$	0条

储存于学生头脑中的新旧知识被充分地调动而激活起来, 通过形象思维、经验思维、抽象思维等不同的思维活动, 完成从杂乱到条理、从直观到抽象、从表面到本质的飞跃.

根据结论, 探讨β取不同值的情况 (学生活动):

1. $\beta = 60^\circ$.

分析: 因为$60^\circ > \frac{1}{2}\alpha$恒成立, 不论$\alpha$角怎样变化, 在图3的平面内始终可作2条直线; 而在图4的平面b内, 当$60^\circ > \frac{1}{2}(180^\circ-\alpha)$, 即$\alpha > 60^\circ$时, 可作2条; 当$\alpha = 60^\circ$时, 可作1条, 是角平分线; 当$\alpha < 60^\circ$时, 可作0条.

2. $\beta = 80^\circ$.

分析: 当$\alpha > 180 - 2\times 80^\circ = 20^\circ$时, 可作4条; 当$\alpha = 20^\circ$时, 可作3条; 当$\alpha < 20^\circ$时, 可作2条.

3. $\beta = 45^\circ$.

分析: 当$\alpha = 90^\circ$时, 可作2条, 分别是2条角平分线; 当$\alpha < 90^\circ$时, 也可作2条, 都在平面a内; 因为$\frac{1}{2}\angle APC > 45^\circ$, 在平面$b$内可作0条.

4. $\beta = 40^\circ$.

分析: 当$\beta = \frac{1}{2}\alpha$, 即$\alpha = 2\beta = 80^\circ$时, 在$a$内可作1条, 即角平分线, 这时$\angle APC = 100^\circ$, 在$b$内可作0条; 当$\alpha > 80^\circ$时, 在$a$内可作0条, 又因为$\angle APC < 100^\circ$, 所以在$b$内可作0条.

因此, 当$\alpha < 80^\circ$时, 可作2条; 当$\alpha = 80^\circ$时, 可作1条; 当$\alpha > 80^\circ$时, 可作0条. 此结论回答了本案例中的问题.

将一般性的结论应用到各种具体的情况, 是一个由"认识"回到"实践"的过程, 这种思维反馈回路为新的思维活动周期提供前提与基础, 促使学生的思维活动不断循环、深入地发展,进一步优化思维结构.

根据探讨, 总结规律与结论.

β的取值范围	相应α的取值范围	可作直线的条数
$\beta = 45^\circ$时	$\alpha = 90^\circ$	2条
	$\alpha < 90^\circ$	2条
$\beta > 45^\circ$时	$\alpha > 180^\circ - 2\beta$	4条
	$\alpha = 180^\circ - 2\beta$	3条
	$\alpha < 180^\circ - 2\beta$	2条
$\beta < 45^\circ$时	$\alpha > 2\beta$	0条
	$\alpha = 2\beta$	1条
	$\alpha < 2\beta$	2条

对思维结构的自我调整和完善, 正体现了学生发展着的思维是在与外部环境相互作用的过程中, 经过不断的解构、建构, 螺旋式完成的.

向量的系数与点的位置关系

246736 安徽省浮山中学 李勤俭

在向量的教学内容中, 有关三点共线、四点共面有以下两个重要的定理:

定理1 平面上任意三点 A、B、P 共线的充要条件是对任一点 O, 存在惟一有序实数对 (x,y), 使得 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 且 $x+y=1$.

定理2 空间中任意四点 A、B、C、P 共面的充要条件是对空间任一点 O, 存在惟一有序实数对 (x,y,z), 使得 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 且 $x+y+z=1$.

这里很自然地要提出以下两个问题:

(1) 若 $x+y=1\,(x+y+z=1)$, 则点 P 在直线(平面)上的位置如何确定?

(2) 若 $x+y\neq 1\,(x+y+z\neq 1)$, 则点 P 的位置如何确定? 带着这两个问题, 笔者经过探讨, 发现了如下一些有意思的结论.

1. "邻正对负界为0"

先看第(1)个问题.

命题1 设平面上任意三点 A、B、P, 满足: 对任一点 O 有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$, 且 $x+y=1$, 则点 P 的位置与 x、y 的符号关系见表1.

表 1

x的符号	y的符号	点P的位置
+	+	在线段AB上
+	−	在BA的延长线上
−	+	在AB的延长线上
−	−	不合题意

表 2

x的符号	y的符号	z的符号	点P的位置
+	+	+	在1区
+	+	−	在6区
+	−	+	在4区
+	−	−	在5区
−	+	+	在2区
−	+	−	在7区
−	−	+	在3区
−	−	−	不合题意

命题2 设空间上任意四点 A、B、C、P, 满足: 对任意一点 O 有 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, 且 $x+y+z=1$, 则点 P 的位置与 x、y、z 的符号关系见表2 (各区位置见图1).

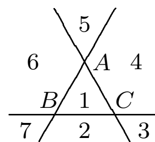


图 1

将以上两个命题的结论归纳成一句话, 即为: 邻正对负界为0. 具体解释如下:

当点 P 与某点相对时, 对应的系数取负; 与某点相邻时, 对应的系数取正; 在相邻和相对的边界上时, 对应的系数取0. 即当点 P 在线段 AB 上时, 与 A、B 都相邻, 则 $x>0$, $y>0$; 点 P 在线段 AB 的延长线上时, 与 B 相邻与 A 相对, 则 $x<0$, $y>0$; 如图1, 当点 P 在区域2时, 点 P 与 A 相对, 与 B、C 相邻, 故有 $x<0$, $y>0$, $z>0$; 又如, 当点 P 在区域5时, 点 P 与 A 相邻, 与 B、C 相对, 故有 $x>0$, $y<0$, $z<0$. 等等.

特别地, (1) 当点 P 在直线 AB 上时, 正好落在与点 C 相对、相邻区域交界上, 故对应的系数 $z=0$, 其余类推.

(2) 当点 P 与点 C 重合时, $x=0=y$, 其余类推.

这样我们即可由 x、y、z 的符号快速地确定点 P 的位置. 如下例.

例 若 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, 则点 P 在 $\cdots\cdots$( )

(A) 线段 AB 上;

(B) 线段 AB 的延长线上;

(C) 线段 BA 的延长线上;

(D) 不能确定.

分析: 由 $x>0$, $y<0$ 知, 点 P 在直线 AB

上且与A相邻与B相对, 故点P在线段BA的延长线上, 因此选C.

又如, 若$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$, 则由上法可知, 点$P$与$A$、$C$相邻, 与$B$相对, 从而可得点$P$在区域4内, 等等. 这样就可以很容易地将点$P$的位置与表达式中的各项系数联系起来, 为利用数形结合思想解决相关问题提供了一种快速便捷的方法.

2. "同侧小于1、 异侧大于1、 平行等于0"

再看第(2)个问题.

命题3 设A、B、O是平面上的不共线的三点, 且点P满足$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ (x、$y\in\mathbf{R}$), 则有以下结论成立:

(1) 若$x+y>1$, 则点P、O在直线AB的异侧;

(2) 若$x+y<1$, 则点P、O在直线AB的同侧;

(3) 若$x+y=1$, 则点P在直线AB上;

(4) 若$x+y=0$, 则点P、O重合或$OP/\!/AB$.

反之亦然.

命题4 设A、B、C、O是空间的不共面的四点, 且点P满足 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ (x、y、$z\in\mathbf{R}$), 则有以下结论成立:

(1) 若$x+y+z>1$, 则点P、O在平面ABC的异侧;

(2) 若$x+y+z<1$, 则点P、O在平面ABC的同侧;

(3) 若$x+y+z=1$, 则点P在平面ABC上;

(4) 若$x+y+z=0$, 则$OP/\!/$平面ABC.

反之亦然.

将命题3、4归纳为如下一句话:"同侧小于1、异侧大于1、平行等于0".

以上四个命题的证明利用向量的有关知识即能获得, 这里从略.

若将以上四个命题结合起来考虑, 向量的系数和点的位置关系的判断将更容易、更直观.

3. 向量的系数与点的位置关系的坐标解释

以上四个命题如果借助笛卡尔坐标系来解释, 其结论就显而易见了. 以O为坐标原点, 以$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$)的方向为 x、y (x、y、z)轴的正方向建立坐标系(可能是斜坐标系)(如图2、3), 各方向的单位长度即为$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$)的模. 在这样的坐标系下, 直线AB (平面ABC)的方程为$x+y=1$ ($x+y+z=1$). 在$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$)中, (x,y) ((x,y,z))即成为点P在此坐标系下的坐标. 从而用坐标的方法即可很容易理解命题1~4了. 若点P在直线AB (平面ABC)上时, $x+y=1$ ($x+y+z=1$); 若点P在直线AB (平面ABC)下方时, $x+y<1$ ($x+y+z<1$); 若点P在直线AB (平面ABC)上方时, $x+y>1$ ($x+y+z>1$); 若点O、P重合或$OP/\!/AB$ ($OP/\!/$平面ABC)时, $x+y=0$ ($x+y+z=0$)等. 至于x、y (x、y、z)的符号与点P的位置关系由图3也可很容易理解.

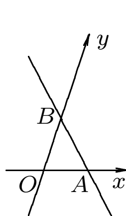


图 2

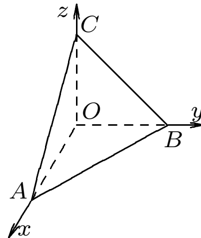


图 3

从以上分析可以看到, 向量的代数表示与几何表示之间的密切关系, 这也正体现了向量中的数形结合思想, 揭示了向量的系数与对应点的位置之间的关系.

(上接第11–30页)

向量$\overrightarrow{AB}$的终点B (或起点A), 落在单位圆上的任何位置, 再根据$|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}-\vec{b}|$)的大小($0<|\overrightarrow{AB}|<2$), 调整题中条件即可. 这时解的情况将依条件而定. 文中所涉及的学生1、学生2、学生3所在小组得出的结果均在这一范围内.

参考文献

阮伟强. 一道三角函数求值题的探究及思考. 数学教学. 2005. 4.

运用概率解决排列问题一例

318020　浙江省黄岩中学　蒋荣清

引例　10人站成一行, 如果要求甲在乙左边(不一定相邻), 共有多少种站法?

解决本题如直接进行分类显然比较繁杂, 事实上甲在乙左边与甲在乙右边机会均等, 因此答案为$\dfrac{A_{10}^{10}}{2}$. 在等可能性事件概率计算中, 往往先通过排列组合知识求出各事件种数, 再相除得到. 反过来自然也可由概率求解排列组合问题.

请看下面问题:

如图1, 一条电路在从A到B处接通时, 可以有多少条不同的线路?

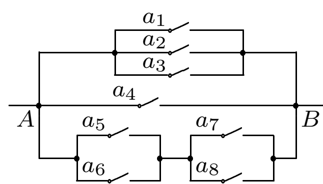


图 1

当然, 题目原意只是要求简单地运用分类和分步原理, 答案为$3+1+2\times2=8$. 然而, 要是我们把题目改一下, 改成求能够接通情况种数, 问题就比较复杂了. 通常我们会用排除法解这一道题, 但这里并联开关比较多, 容易重复或遗漏. 下面另辟蹊径, 不妨从概率角度来思考.

我们先来研究一下最简单的串联电路, 其实我们能遇到的最复杂的电路也只是它们的组合而已.

求如图2、3所示的两电路接通的概率P.

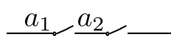


图 2

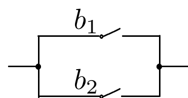


图 3

设每个开关闭合的概率为p, 断开的概率为q, 则$p+q=1$.

分析: 对于串联电路, 接通的情况只有一种——a_1闭合, a_2也闭合, 所以对于图2, 我们可以正面考虑, 得出$P=p\times p=p^2$.

而对于并联电路, 不能接通的情况较少, 于是从反面考虑, 得出$P=1-q\times q=1-q^2$.

有了这么一样武器, 其他的只需将原有武器稍微改装一下, 就能百战百胜. 比如将题中的电路换成图4的情况.

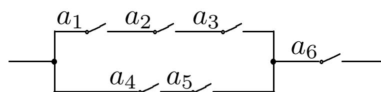


图 4

分析: 把a_1、a_2、a_3、a_4、a_5组成的开关看成整体, 以下简称$(a_1a_2a_3a_4a_5)$, 它与a_6构成串联电路. 记$(a_1a_2a_3a_4a_5)$接通的概率为p_{12345}, 不接通的概率为q_{12345}, 其他类同. 考虑其正面, $P=p_6\times p_{12345}$, 同样$(a_1a_2a_3)$与(a_4a_5)组成并联电路, 考虑其反面, $q_{12345}=q_{123}\times q_{45}$, 而$p_{123}=p_1p_2p_3$, $p_{45}=p_4p_5$, 故

$$\begin{aligned}P&=p_6\times p_{12345}=p_6\times(1-q_{12345})\\&=p_6\times(1-q_{123}\times q_{45})\\&=p_6[1-(1-p_1p_2p_3)(1-p_4p_5)].\end{aligned}$$

所以我们只要先将只有一层串并联的电路接通的概率P, 不接通的概率Q写出来, 然后逐次扩展到二层、三层、四层, 甚至十层, 直到得出结果.

现在就来应用一下.

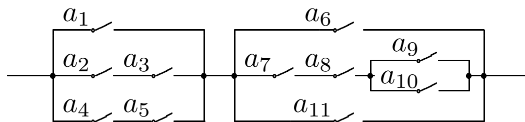


图 5

消项: 数列求和的根本

312000 浙江省绍兴市稽山中学 斯国武

文[1]对平方数累加公式作了探讨, 并给出了公式的两种推导方法. 其一是利用恒等式“$(1+k)^3=k^3+3k^2+3k+1$”, 将k自1至n代入, 并累加后消去左、右相同的项, 整理而得. 然而, 作者认为这种累加方法难以想到, 并非“理所当然”, 于是, 作者给出了第二种方法.

事实上, 对待同一个数学问题, 由于观点不同, 思维视角、思维层次、思维力度等就会不同, 我认为, 从一般意义上来说, “消项”才是最根本而又重要的数列求和的思想方法, 并具有一定的通用性. 因为“求和”本来就是将一连串的值化简整合成一个数(式)的过程, 是需要消掉许多“项”的. 正是基于这一想法, 我们往往可将数列通项a_n拆成两项之差, 如“$a_n=f(n+1)-f(n)$” 的形式, 从而达到消项求和的目的. 例证如下:

1. 求等差数列$\{a_n\}$(公差$d\neq0$)的前n项和S_n

利用$a_n=a_n\times1=a_n\times\dfrac{a_{n+1}-a_{n-1}}{2d}=\dfrac{1}{2d}(a_{n+1}a_n-a_na_{n-1})\,(n\geqslant2)$知, $S_n=a_1+\dfrac{1}{2d}[(a_3a_2-a_2a_1)+(a_4a_3-a_3a_2)+(a_5a_4-a_4a_3)+\cdots+(a_{n+1}a_n-a_na_{n-1})]=a_1+$

~~~~~~

已知每个开关闭合的概率为$\dfrac{1}{3}$, 求图5电路接通的概率P.

解: $p=\dfrac{1}{3}$, $q=\dfrac{2}{3}$, $p_{23}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$, $p_{45}=\dfrac{1}{9}$,

$$\begin{aligned}\therefore\quad q_{12345}&=q_1q_{23}q_{45}\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{128}{243},\end{aligned}$$

$$q_{9\,10}=q_9q_{10}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

$$\begin{aligned}p_{789\,10}&=p_7p_8p_{9\,10}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\left(1-\frac{4}{9}\right)=\frac{5}{81},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad q_{6789\,10\,11}&=q_6q_{789\,10}q_{11}\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{5}{81}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{304}{729},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad P&=p_{12345}p_{6789\,10\,11}\\&=\left(1-\frac{128}{243}\right)\left(1-\frac{304}{729}\right)=\frac{48875}{177147}.\end{aligned}$$

对于求电路接通或不接通, 甚至于接通的情况种数以及不接通的情况种数这样的问题, 都可归结为: 电路串联时, 从计算接通的概率入手; 电路并联时, 从计算不接通的概率入手.

现在我们就来解决文章开头提出的问题,

解: 设每个开关闭合的概率$p=\dfrac{1}{2}$, 断开的概率$q=\dfrac{1}{2}$.

$$q_{56}=\frac{1}{4},\ q_{78}=\frac{1}{4},\ p_{5678}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16},$$

$$\begin{aligned}q_{12345678}&=q_1q_2q_3q_4q_{5678}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{7}{16}=\frac{7}{256},\end{aligned}$$

$$p_{12345678}=1-\frac{7}{256}=\frac{249}{256}.$$

根据接通概率$=\dfrac{\text{接通的情况种数}}{\text{总情况种数}}$, 总情况种数等于$2^8$.

所以接通的情况种数$=2^8\times\left(\dfrac{249}{256}\right)=249$.

从这里可以看出, 学习数学一定要举一反三, 不断反思, 才能百战百胜.
~~~~~~

$\frac{1}{2d}(a_{n+1}a_n-a_2a_1)=a_1+\frac{1}{2d}\{(a_1+nd)[a_1+(n-1)d]-(a_1+d)a_1\}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

2. 求等比数列$\{a_n\}$(公比$q\neq 1$)的前n项和S_n

因$a_n=a_1q^{n-1}=a_1q^{n-1}\times\frac{1-q}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}(q^{n-1}-q^n)$, 于是

$S_n=\frac{a_1}{1-q}[(1-q^1)+(q^1-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots+(q^{n-1}-q^n)]=\frac{a_1}{1-q}(1-q^n).$

3. 求$\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$的前$n$项和$S_n$

可由$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$得

$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$

4. 求自然数幂的和

由$(n+1)^2-n^2=2n+1$,

得$n=\frac{(n+1)^2-n^2-1}{2}$, 所以,

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\{(2^2-1^2-1)+(3^2-2^2-1)+\cdots+[(n+1)^2-n^2-1]\}=\frac{1}{2}\{(2^2-1^2)+(3^2-2^2)+(4^2-3^2)+\cdots+[(n+1)^2-n^2]-n\}=\frac{1}{2}[(n+1)^2-1-n]=\frac{n^2+n}{2}.$

由$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$, 得$n^2=\frac{(n+1)^3-n^3-3n-1}{3}$,

故 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}\{(2^3-1^3)+(3^3-2^3)+\cdots+[(n+1)^3-n^3]-3(1+2+3+\cdots+n)-n\}=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-1-3\times\frac{(n+1)n}{2}-n\right]=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

由$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$得$n^3=\frac{(n+1)^4-n^4-6n^2-4n-1}{4}$, 故

$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\{(2^4-1)+(3^4-2^4)+\cdots+[(n+1)^4-n^4]-6(1^2+2^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)-n\}=\frac{1}{4}[(n+1)^4-1-n(n+1)(2n+1)-2(n+1)n-n]=\frac{1}{4}(n^4+2n^3+n^2)=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$

5. 求自然数连乘积之和, 如求$\{n(n+1)(n+2)\}$的前n项和

由$n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)[(n+3)-(n-1)]=\frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]$ 知

$S_n=\frac{1}{4}[(1\times2\times3\times4-0)+(2\times3\times4\times5-1\times2\times3\times4)+(3\times4\times5\times6-2\times3\times4\times5)+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)]=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

6. 求$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和, 其中$\{a_n\}$、$\{b_n\}$分别为等差、等比数列

如求$\{(3n+1)\cdot 2^n\}$的前n项和S_n, 由$(3n+1)2^n=(3n+4)2^{n+1}-(3n+1)2^n-6\times2^n$得

$S_n=[(7\times2^2-4\times2^1)+(10\times2^3-7\times2^2)+(13\times2^4-10\times2^3)+\cdots+(3n+4)\times2^{n+1}-(3n+1)2^n]-6(2^1+2^2+\cdots+2^n)=(3n+4)2^{n+1}-4\times2^1-6\times\frac{2(1-2^n)}{1-2}=(3n+4)\times2^{n+1}-12\times2^n+4.$

需要指出的是, 我们在进行解题教学时, 介绍一题多解并帮助学生构建知识网络是必要的. 甚至, 一些技巧的介绍还能激发学生的学习兴趣, 让学生感悟到数学美, 并因此而欣赏数学、热爱数学. 但我们更应大力提倡讲授通法, 揭示问题之根本. 因此, 我建议应自始至终地在有关数列求和的问题解决中渗透“消项”思想, 包括等差数列、等比数列的前n项和公式的推导. 使“消项”成为数列求和的一条主线, 并前后连贯.

现行教材中给出的用于求等差数列前n项和的“倒序相加法”和用于求等比数列前n项和的“错位相减法”, 因具有一定的技巧性(学生反

(下转封底)

探究一道常见习题中的几个最小值问题

214044 江苏省无锡市市北高级中学 江国荣

近期, 笔者在高三复习时选用了这样的一道常见习题:

在平面直角坐标系内, 过定点$P(1,2)$的动直线l与y轴正半轴、x轴正半轴分别交于A、B两点, 原点为O, 如图1. 求

(1) $(|PA|\cdot|PB|)_{\min}$;

(2) $(S_{\triangle OAB})_{\min}$.

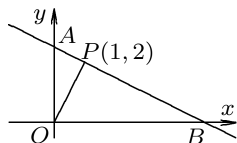


图 1

笔者用几何画板软件进行验证时却发现了$|OA|+|OB|$、$|AB|$、$C_{\triangle AOB}$(周长)同样也存在最小值, 这大大激发了笔者想进一步探究这一问题的兴趣, 现整理成文如下: 题中的定点先改设一般点$P(a,b)$ $(a>0,\ b>0)$, 再设$\angle ABO=\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1) 求$|PA|\cdot|PB|$的最小值.

分析: 如图2, 由题意知

$|PA|=\dfrac{a}{\cos\theta}$, $|PB|=\dfrac{b}{\sin\theta}$,

$$|PA|\cdot|PB|=\frac{ab}{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$=\frac{2ab}{\sin 2\theta}\geqslant 2ab,$$

仅当$\theta=45^\circ$时, 此时$k_{AB}=-1$,

$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=2ab$.

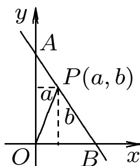


图 2

(2) 求$|OA|+|OB|$的最小值.

分析: 如图2, 由条件得$|OA|+|OB|=(b+a\tan\theta)+(a+b\cot\theta)\geqslant a+b+2\sqrt{ab}$, 当且仅当$a\tan\theta=b\cot\theta$即$\theta=\arctan\sqrt{\dfrac{b}{a}}$时, $(|OA|+|OB|)_{\min}=a+b+2\sqrt{ab}$.

(3) 求$|AB|$的最小值.

分析: 如图2, 由条件得

$$|AB|=|PA|+|PB|=\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta},$$

$\because\ \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$,

$$\therefore\ \left(\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}\right)^2$$

$$=\left(\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}\right)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$=a^2+b^2+\left(\frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{ab\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{ab\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\left(\frac{b^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+\frac{ab\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{ab\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$\geqslant a^2+b^2+3\sqrt[3]{a^4b^2}+3\sqrt[3]{b^4a^2}=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3,$$

当且仅当$\dfrac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{ab\cos\theta}{\sin\theta}$及$\dfrac{b^2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{ab\sin\theta}{\cos\theta}$, 即$\theta=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$时等号同时成立.

$\therefore\ \dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{b}{\sin\theta}\geqslant(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$即 $\theta=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$时, $|AB|_{\min}=(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2})^{\frac{3}{2}}$.

说明: 关于$f(\theta)=\dfrac{a}{\cos\theta}+\dfrac{b}{\sin\theta}\left(a>0,\ b>0, 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$此类最小值问题的探讨, 虽都可有解答方法. 在此, 笔者认为, 若充分利用结论$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$来求解, 则求解过程简洁明快, 同时充分展示了三角式的对称美. 同理, 若$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=1$($a$、$b$、$x$、$y\in\mathbf{R}^+$, 且$a$、$b$为

常数), 易得$x^2+y^2=(x^2+y^2)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}\right)^2\geqslant\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^3$.

(4) 求三角形OAB的面积$S_{\triangle OAB}$的最小值.

分析: 由条件得

$$\begin{aligned}S_{\triangle OAB}&=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\\&=\frac{1}{2}(b+a\tan\theta)\cdot(a+b\cot\theta)\\&=\frac{1}{2}[2ab+(b^2\cot\theta+a^2\tan\theta)]\\&\geqslant\frac{1}{2}(2ab+2\sqrt{b^2\cot\theta\cdot a^2\tan\theta})=2ab,\end{aligned}$$

当且仅当$b^2\cot\theta=a^2\tan\theta$, 即

$\theta=\arctan\frac{b}{a}$时, $(S_{\triangle OAB})_{\min}=2ab$,

此时P为AB中点,如图3.

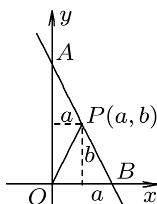


图 3

(5) 求三角形OAB的周长$C_{\triangle OAB}$最小值.

分析: 如图3, 由条件得

$$\begin{aligned}&C_{\triangle OAB}=|OA|+|OB|+|AB|\\&=|OA|+|OB|+|PA|+|PB|\\&=\left(b+\frac{a\sin\theta}{\cos\theta}\right)+\left(a+\frac{b\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\frac{a}{\cos\theta}+\frac{b}{\sin\theta}\\&=a+b+\frac{a(\sin\theta+1)}{\cos\theta}+\frac{b(\cos\theta+1)}{\sin\theta}\\&=a+b+a\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}+b\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\\&=a+b+a+\frac{2a\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}\\&\quad+\frac{b\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}+b\\&\geqslant 2a+2b\\&\quad+2\sqrt{\frac{2a\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{b\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}}\\&=2a+2b+2\sqrt{2ab},\end{aligned}$$

当且仅当

$$\frac{2a\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{b\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

即 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2a}}$,

$\theta=2\arctan\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2a}}$时,

$(C_{\triangle OAB})_{\min}=2a+2b+2\sqrt{2ab}$.

据以上的分析, 当$P(1,2)$时, 即$a=1$, $b=2$代入以上结论(设直线的倾斜角$\alpha=\pi-\theta$)易得:

① 当$\alpha=\frac{3\pi}{4}$时,

$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=4$;

② 当$\alpha=\pi-\arctan\sqrt{2}$时,

$(|OA|\cdot|OB|)_{\min}=3+2\sqrt{2}$;

③ 当$\alpha=\pi-\arctan\sqrt[3]{2}$时,

$(|AB|)_{\min}=(1+\sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$;

④ 当$\alpha=\pi-\arctan 2$时,

$(S_{\triangle OAB})_{\min}=4$;

⑤ 当$\alpha=\pi-2\arctan\frac{1}{2}$时,

$(C_{\triangle OAB})_{\min}=10$.

根据本文的探究结果, 我们能得到一个更有意义的结论:

若直线l过定点$P(a,a)$, 即$a=b>0$, 当直线l的倾斜角$\alpha=\frac{3\pi}{4}$时, 以上5个量能同时取到最小值, 它们分别是

$(|PA|\cdot|PB|)_{\min}=2a^2$;

$(|OA|+|OB|)_{\min}=4a$;

$|AB|_{\min}=2\sqrt{2}a$;

$(S_{\triangle OAB})_{\min}=2a^2$;

$(C_{\triangle OAB})_{\min}=(4+2\sqrt{2})a$.

另外只要结合图形的对称性也能很好地解决定点P在其他象限内的同类极值问题.

读《一道三角函数求值题的探究及思考》有感

246600 安徽省岳西县教育局教研室 汪世南

《数学教学》2005年第4期所刊登的《一道三角函数求值题的探究及思考》一文，讲述教师在教学中，由于不经意选了一道错题让学生练习，而被学生发现，接着教师和学生一起进行探究，共同探寻错误的根源，并把错题改成正确题，收到了较好效果. 在某种意义上，这一做法符合课改精神和新课程理念，值得称道. 但文中的一处错误及学习小组展示研究结果后，教师没能及时予以提炼、升华, 却是该文的瑕疵和不足.

为说明方便, 再将原题及解答的简略过程抄录如下:

题: 已知向量 $\overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

(1) 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值;

(2) 若 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0$, 且 $\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$, 求 $\cos\alpha$ 的值.

略解: (1) 由 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$, 用公式并整理得 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{12}{13}$;

(2) 由条件得 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{5}{13}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$,

故 $\cos\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+\beta]=\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta=\dfrac{63}{65}$.

一学生用类似方法算得 $\sin\alpha=-\dfrac{16}{65}$, 与条件 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 矛盾. 接着教师与学生一起探究. 探究中, 利用单位圆 (图1), 由算得的 $\cos\angle AOB=\dfrac{12}{13}>\dfrac{3}{5}$ 得 $\angle AOB<\arccos\dfrac{3}{5}<\arcsin\dfrac{3}{5}$, 说明 $\overrightarrow{a}$ 必落在第四象限.

首先, 这里第二个不等号不成立.

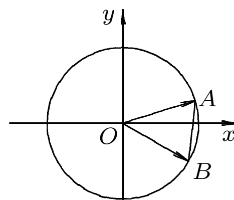


图 1

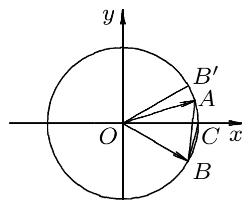


图 2

因 $\dfrac{3}{5}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上 (或 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 在 $[0,1]$ 上) 的单调性知

$$\arccos\frac{3}{5}>\frac{\pi}{4}>\arcsin\frac{3}{5}.$$

以 $\dfrac{3}{5}$ 作为函数值或角的切入点, 有点不近情理. 合情推理的选择应取 $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$.

$\because\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<\dfrac{4}{5}<\dfrac{12}{13}$, $\therefore$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上,

$$\frac{\pi}{4}>\arccos\frac{4}{5}>\arccos\frac{12}{13}=\angle AOB.$$

这样在题设条件下, 考虑单位圆中圆心角的意义可得 $\angle COB'=\angle BOC>\angle AOB$ (图2), 即角的一部分大于整体, 这是不可能的, 所以向量 $\overrightarrow{a}$ 必落在第四象限.

事实上, 换一个思路, 题给条件 $|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\dfrac{\sqrt{26}}{13}$, 相当于给出单位圆中的一条弦的弦长为 $\dfrac{\sqrt{26}}{13}$, 由 $\sin\beta=-\dfrac{3}{5}$, $-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0\Longrightarrow\cos\beta=\dfrac{4}{5}$, 此时 $|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{1^2+1^2-2\cos\beta}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}>\dfrac{\sqrt{26}}{13}=|\overrightarrow{AB}|$. 据圆的性质, 由图2知向量 $\overrightarrow{a}$ 必落在第四象限. 所以应将条件中的 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 改为 $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$. 此时显然 $\cos\alpha$ 有两解.

基于这一思想, 要改此题, 更一般的可使

(下转第11–24页)

关于2005高考(全国卷Ⅱ理)一道概率题的改编

710400 陕西省周至县教育局教研室 高伟鹏

2005年高考 (全国卷Ⅱ理) 第19题是: 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设全局比赛相互间没有影响, 令ξ为本场比赛的局数, 求ξ的概率分布和数学期望 (精确到0.0001).

笔者认为, 这是一道很好的概率问题, 具有进一步研究和探讨的必要. 题目的设问新颖独特、不落俗套(特别是设问中的随机变量"ξ"已经跳出了常规情形和习惯模式). 如果我们在一定的框架和范围内, 能够把此题的设问进行一些调整和改动, 就可以编拟出另外一些概率问题. 本文在给出2005年高考(全国卷Ⅱ理)第19题解法基础上将给出这道题的几个改编题.

先看原题的解法.

解: 依题意, ξ的取值有3、4、5三个值.

$\xi=3$时, 本场比赛有一队(甲队或乙队)连胜第一、二、三局,

$P(\xi=3)=0.6^3+0.4^3=0.216+0.064=0.28$;

$\xi=4$时, 本场比赛有一队(甲队或乙队)第四局胜且第一、二、三局中胜两局,

$P(\xi=4)=(0.6^3\times0.4)C_3^2+(0.4^3\times0.6)C_3^2=0.2592+0.1152=0.3744$;

同理, $P(\xi=5)=(0.6^3\times0.4^2)C_4^2+(0.4^3\times0.6^2)C_4^2=0.20736+0.13824=0.3456$.

ξ的概率分布列为

ξ	3	4	5
P	0.28	0.3744	0.3456

$E\xi=3\times0.28+4\times0.3744+5\times0.3456=0.84+1.4976+1.7280=4.0656$.

现给出原题的几个改编.

改编一: 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设全局比赛相互间没有影响, 令ξ为本场比赛甲队胜乙队的局数(不计甲队负乙队的局数), 求ξ的概率分布和数学期望 (精确到0.0001).

解: 甲队胜乙队的局数作为随机变量ξ, 其取值有0、1、2、3四个值.

$\xi=0$时, 本场比赛共三局, 甲队连负第一、二、三局, $P(\xi=0)=0.4^3=0.064$;

$\xi=1$时, 本场比赛共四局, 甲队负第四局, 且第一、二、三局中甲队胜一局,

$P(\xi=1)=C_3^1 0.6\times0.4^3=0.1152$;

$\xi=2$时, 本场比赛共五局, 甲队负第五局, 第一、二、三、四局中甲队胜两局,

$P(\xi=2)=C_4^2 0.6^2\times0.4^3=0.13824$;

$\xi=3$时, 本场比赛共三局、或四局、或五局. ① 共三局时, 甲队连胜第一、二、三局, ② 共四局时, 第四局甲队胜, 且第一、二、三局中甲队胜两局, ③ 共五局时, 第五局甲队胜, 且第一、二、三、四局中甲队胜两局,

$P(\xi=3)=0.6^3+C_3^2 0.6^3\times0.4+C_4^2 0.6^3\times0.4^2=0.216+0.2592+0.20736=0.68256$;

ξ的概率分布列为

ξ	0	1	2	3
P	0.064	0.1152	0.13824	0.68256

$E\xi=0\times0.064+1\times0.1152+2\times0.13824+3\times0.68256=0+0.1152+0.27648+2.04768=2.43936\approx2.4394$.

改编二: 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设全局比赛相互间没有影响, 令

ξ为本场比赛乙队胜甲队的局数(不计乙队负甲队的局数), 求ξ的概率分布和数学期望 (精确到0.0001).

改编三: 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设全局比赛相互间没有影响, 令ξ为本场比赛甲队胜乙队的局数与乙队胜甲队的局数之差, 求ξ的概率分布和数学期望 (精确到0.0001).

解: 依题意, 随机变量ξ的取值有±1、±2、±3六个值.

$\xi=-3$时, 本场比赛甲队连负三局,

$P(\xi=-3)=0.4^3=0.064$;

$\xi=-2$时, 本场比赛甲队负第四局而乙队第一、二、三局中胜两局,

$P(\xi=-2)=C_3^2 0.4^3 0.6=0.1152$;

$\xi=-1$时, 本场比赛甲队负第五局而乙队第一、二、三、四局中胜两局,

$P(\xi=-1)=C_4^2 0.4^3 0.6^2=0.13824$;

$\xi=1$时, 本场比赛甲队胜第五局而乙队第一、二、三、四局中胜两局,

$P(\xi=1)=C_4^2 0.6^3 0.4^2=0.20736$;

$\xi=2$时, 本场比赛甲队胜第四局而乙队第一、二、三局中胜一局,

$P(\xi=2)=C_3^2 0.6^3 0.4=0.2592$;

$\xi=3$时, 本场比赛甲队连胜三局,

$P(\xi=3)=0.6^3=0.216$.

ξ的概率分布列为

ξ	-3	-2	-1	1	2	3
P	0.064	0.1152	0.13824	0.20736	0.2592	0.216

$E\xi=\cdots\approx 0.8131$.

改编四: 甲、乙两队进行一场排球比赛, 根据以往经验单局比赛甲队胜乙队的概率为0.6, 本场比赛采用五局三胜制, 即先胜三局的队获胜, 比赛结束. 设全局比赛相互间没有影响, 令ξ为本场比赛赢队所胜三局的局号和(一局的局号即该局的次序号; 第一局的局号为1, 第二局的局号为2, 第三局的局号为3, ⋯⋯, 赢队所胜三局的局号和即赢队所胜三局的局号相加所得的和), 求ξ的概率分布和数学期望 (精确到0.0001).

解: 依题意, ξ的取值及相应的赢队所胜三局的局号列表如下

ξ	6	7	8	9	10	11	12
赢队所胜三局局号	1、2、3	1、2、4	1、2、5 1、3、4	1、3、5 2、3、4	1、4、5 2、3、5	2、4、5	3、4、5

$\xi=6$时, 本场比赛只有三局,

$P(\xi=6)=P(\xi=6$且甲队赢$)$
$+P(\xi=6$且乙队赢$)$
$=0.6^3+0.4^3=0.216+0.064=0.28$;

$\xi=7$时, 本场比赛只有四局,

$P(\xi=7)=P(\xi=7$且甲队赢$)$
$+P(\xi=7$且乙队赢$)$
$=0.6^3\times 0.4+0.4^3\times 0.6$
$=0.0864+0.0384=0.1248$;

$\xi=8$时, 本场比赛有五局(局号为1、2、5)或四局(局号为1、3、4),

$P(\xi=8)=P(\xi=8$且甲队赢$)$
$+P(\xi=8$且乙队赢$)$
$=(0.6^3\times 0.4^2+0.6^3\times 0.4)$
$+(0.4^3\times 0.6^2+0.4^3\times 0.6)$
$=(0.03456+0.0864)+(0.02304+0.0384)$
$=0.1824$.

同理, $P(\xi=9)=P(\xi=9$且甲队赢$)$
$+P(\xi=9$且乙队赢$)$
$=(0.6^3\times 0.4^2+0.6^3\times 0.4)$
$+(0.4^3\times 0.6^2+0.4^3\times 0.6)$
$=(0.03456+0.0864)+(0.02304+0.0384)$
$=0.1824$;

$P(\xi=10)=(0.6^3\times 0.4^2)\times 2$
$+(0.4^3\times 0.6^2)\times 2$
$=0.06912+0.04608=0.1152$;

$P(\xi=11)=0.6^3\times 0.4^2+0.4^3\times 0.6^2$
$=0.03456+0.02304=0.0576$;

$P(\xi=12)=0.6^3\times 0.4^2+0.4^3\times 0.6^2$
$=0.03456+0.02304=0.0576$.

ξ的概率分布列为

ξ	6	7	8	9	10	11	12
P	0.28	0.1248	0.1824	0.1824	0.1152	0.0576	0.0576

$E\xi=\cdots=8.1312$.

形如$2^r+2^s+2^t$的数由小到大排列规律的探讨

556000 贵州省凯里市黔东南民族师范高等专科学校 罗时健

2003年全国高考数学(理工农医)试题22 (ii)(附加题): 设数列$\{b_n\}$是集合$\{2^r+2^s+2^t|0\leqslant r<s<t$, 且$r$、$s$、$t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排成的数列. 已知$b_k=1160$. 求$k$.

此题的解法已刊登在许多杂志上, 其中不少解法构思很精妙, 很具启迪性. 本文再度提起这一问题, 是想从本质上揭示这样的数列$\{b_n\}$, 能否用数学表达式来反映它在排列上的规律性. 即若设$b_k=2^r+2^s+2^t$, 能否找到k、r、s、t间的某种关系. 我们感到这个数列已不是通常形式下的可用一个通项公式$C_m=f(n)$来表达的了, 而应具有另一种完全不同方式的表达形式. 探讨的结果是很有趣的. 而且还便于进行推广:

在条件"$0\leqslant r<s<t$, 且r、s、$t\in\mathbf{Z}$"的制约下, 任一形如$2^r+2^s+2^t$的数与空间点的坐标(r,s,t)是一一对应的, 因此, 数$2^r+2^s+2^t$可用空间的整点(r,s,t)表示.

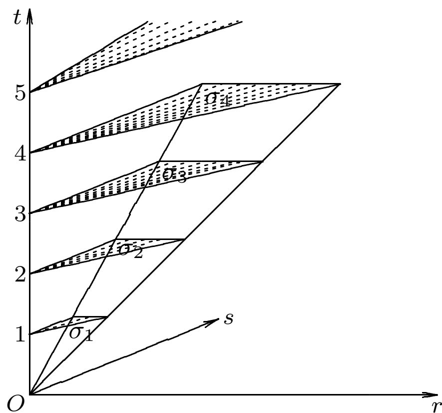


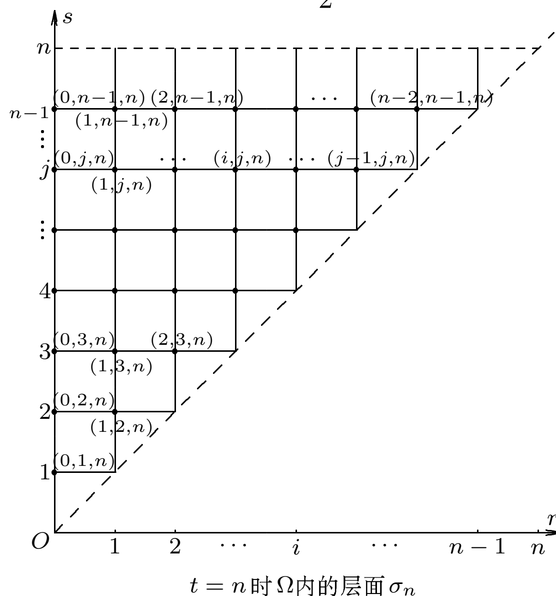
图 1

于是, 空间的所有这样的整点(r,s,t)都在空间区域$\Omega:\{(r,s,t)|0\leqslant r<s<t$, 且$r$、$s$、$t\in\mathbf{Z}\}$内, 这是一个$Orst$空间直角坐标系中以$O$为顶点, 倒立的三棱锥形状的区域, 且整点$(r,s,t)$按$t=2$, $t=3$, $t=4$, $\cdots$逐层分布在Ω内的平面区域σ_2, σ_3, σ_4, $\cdots$上(如图1).

今任取$t=n$时的层面$\sigma_n\ (n\geqslant 2)$, 这是一个等腰直角三角形. 整点(r,s,n)(它代表数$2^r+2^s+2^n$, $0\leqslant r<s<n$)分布在其上. 取定某个$s\ (r<s<n)$.

由$2^0+2^s+2^n<2^1+2^s+2^n<2^2+2^s+2^n<\cdots<2^{s-1}+2^s+2^n$及$2^{s-1}+2^s+2^n<2^s+2^s+2^n=2^{s+1}+2^n<1+2^{s+1}+2^n=2^0+2^{s+1}+2^n$.

于是知这层上的点(r,s,n)在层上的排列顺序如图2所示. 它体现了数$2^r+2^s+2^n$在这一层上由小到大的排列规律: 下小上大, 左小右大: 即横线$s=j$上的每一整点所表示的数都比横线$s=j-1$上的整点所表示的数大; 而同一横线上的整点, 右边的点所表示的数比左边的大. 一一写出, 共有$\dfrac{(n-1)n}{2}$个整点.



$t=n$时Ω内的层面σ_n

图 2

现看$t=n+1$时，即层σ_{n+1}上最小的数应为整点$(0,1,n+1)$. 它代表数$2^0+2^1+2^{n+1}$. 而层面σ_n上最大数为点$(n-2,n-1,n)$对应的数$2^{n-2}+2^{n-1}+2^n$. 有$2^{n-2}+2^{n-1}+2^n<2^{n-1}+2^{n-1}+2^n=2^n+2^n=2^{n+1}<2^0+2^1+2^{n+1}$. 因此，用整点$(r,s,t)$表示的数$2^r+2^s+2^t$"由小到大排列"的规律在$\Omega$域内体现为"下层小，上层大；同一层内是下小上大，左小右大"，于是，数列$\{b_n\}$的"由小到大"的排列规则，还可以有一个空间的表达形式. 分别记层面σ_i上包含的$\{b_n\}$中的项的数目为k_i，由$k_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$. $\{k_n\}$的通项公式为$k_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$. 当$n=1$时，$k_1=0$，这与层面σ_1上没有$\{b_n\}$中的项一致. 这样从各层面$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{n-1}$上共包含了数列$\{b_n\}$的前$\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{i(i-1)}{2}$项. 而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i-1)}{2}&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}i\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=C_n^3.\end{aligned}$$

故从层面σ_2起至层面σ_{n-1}上由小到大排列了$\{b_n\}$的前C_n^3项：a_1, a_2, a_3, $\cdots$, $a_{C_n^3}$. 这样σ_n层面上最小的数$(0,1,n)=2^0+2^1+2^n$即为$\{b_n\}$中的第C_n^3+1项，即$b_{C_n^3+1}=2^0+2^1+2^n$(如图3).

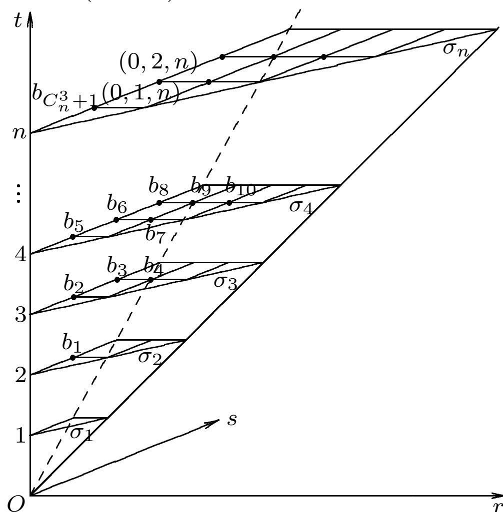


图 3

今对$\{b_n\}$中任一项b_k，设b_k排在σ_n这一层，对应的整点为(i,j,n). 则它在σ_n这一层中第$j-1$条横线的上一条——第j条横线上的各整点从左到右数起的第$i+1$个. 而σ_n层面上由下到上第1, 2, 3, $\cdots$, $j-1$条横线上的整点共有$1+2+3+\cdots+j-1=\dfrac{j(j-1)}{2}=C_j^2$个，故$b_k$应为$\{b_n\}$中第$C_n^3+C_j^2+i+1$项，即$k=C_n^3+C_j^2+C_i^1+1$，即$b_{C_n^3+C_j^2+C_i^1+1}=(i,j,n)=2^i+2^j+2^n$. 这样，对$\{b_n\}$中任一项$2^r+2^s+2^t$ $(0\leqslant r<s<t$, 且r、s、$t\in\mathbf{Z})$，有$b_1=2^0+2^1+2^2$, $b_2=2^0+2^1+2^3$, $b_3=2^0+2^2+2^3$, 当$t\geqslant 3$, $s\geqslant 2$, $r\geqslant 1$时，$b_{1+C_r^1+C_s^2+C_t^3}=2^r+2^s+2^t$. (显然，对$\{a_n\}$为集合$\{2^s+2^t|0\leqslant s\leqslant t$, 且$s$、$t\in\mathbf{Z}\}$中的全体数由小到大排列成的数列. 有$a_{1+C_s^1+C_t^2}=2^s+2^t$). 表达数列$\{b_n\}$的这个关系

$$\begin{cases}b_1=2^0+2^1+2^2,\\b_2=2^0+2^1+2^3,\\b_3=2^0+2^2+2^3,\\b_{1+C_r^1+C_s^2+C_t^3}=2^r+2^s+2^t\\\qquad\qquad(t\geqslant 3,s\geqslant 2,r\geqslant 1),\end{cases}$$

已与常规数列的通项公式$a_n=f(n)$形式上很不同，但在实质方面却都是一样的. 我们姑且将它称之为"广义的"通项公式吧. 下面让我们以此解答原题："若$b_k=1160$. 求k"，因为$1160=2^3(1+16+128)=2^3(1+2^4+2^7)=2^3+2^7+2^{10}$, $\therefore r=3$, $s=7$, $t=10$, 而$k=1+C_r^1+C_s^2+C_t^3=1+C_3^1+C_7^2+C_{10}^3=145$. 若又问："求$b_{97}$"，则$1+C_r^1+C_s^2+C_t^3=97$, 即$C_r^1+C_s^2+C_t^3=96$.

$C_t^3<96$. 从中求满足$C_t^3<96$的最大正整数t. 由$\dfrac{t(t-1)(t-2)}{6}<96$, 因为$\dfrac{9\times8\times7}{6}=84<96<\dfrac{10\times9\times8}{6}=120$, 故$t=9$, 于是$1+C_r^1+C_s^2+C_9^3=97\Longrightarrow C_r^1+C_s^2=12$. 再由$C_s^2<12$. 即$\dfrac{s(s-1)}{2}<12$, 求最大之$s$. 因$\dfrac{5\times4}{2}=10<12<\dfrac{6\times5}{2}=15$, 故 $s=5$. 于是$C_r^1+C_5^2=12\Longrightarrow C_r^1=2$得$r=2$,

故$b_{97}=2^2+2^5+2^9=548$.

2005年上海数学新课标下的高考亮点与质疑

200023 上海市卢湾高级中学 邵春和

2005年上海高考数学卷是基于《上海课程标准》试验一轮(三年)而进行的数学考试, 它更引人关注的是如何兼顾试验学校与非试验学校的学生共用同一张试卷.

一、2005年数学考试四大亮点

1. 关注对数学思维能力的考查

第11题: 有两个相同的直三棱柱, 高为$\dfrac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为$3a$、$4a$、$5a$ ($a>0$). 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则a的取值范围是__________.

简解1: 分类讨论, 可拼成四棱柱若干种形式、三棱柱若干种形式, 然后, 分别计算出各种形式的棱柱的全面积, 再比较大小, 求出a的范围.

简解2: 拼成棱柱的表面积要求最小, 只要求一个棱柱的表面积减去一个最大面积的侧面$\left(底为5a、高\dfrac{2}{a}\right)$或底面(两直角边为$3a$、$4a$的三角形). 拼成四棱柱, 则问题转化为底为$5a$、高为$\dfrac{2}{a}$的矩形的面积大于一底面的面积.

即$\begin{cases} a>0 \\ \dfrac{1}{2}\cdot 4a\cdot 3a<5a\cdot\dfrac{2}{a} \end{cases}$

$\Longrightarrow 0<a^2<\dfrac{5}{3}\Longrightarrow 0<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

点评: 新《上海课程标准》立体几何中, 内容与要求有很大的删减. 本题是以考察学生空间概念与逻辑判断作为重心, 给予不同思维品质的考生提供不同的思路. 简解2, 直接触及问题的核心, 迅速准确地解决了问题.

第21题: 对定义域分别是D_f、D_g的函数$y=f(x)$、$y=g(x)$, 规定: 函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & 当x\in D_f且x\in D_g, \\ f(x) & 当x\in D_f且x\notin D_g, \\ g(x) & 当x\notin D_f且x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=x^2$, 写出函数$h(x)$的解析式;

(2) 求问题(1)中函数$h(x)$的值域;

(3) 若$g(x)=f(x+\alpha)$, 其中α是常数, 且$\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为$\mathbf{R}$的函数$y=f(x)$, 及一个α的值, 使得$h(x)=\cos 4x$, 并予以证明.

第(3)题简析:

$h(x)=f(x)f(x+\alpha)$ ($x\in\mathbf{R}$), 构造$h(x)=\cos 4x$的过程其实是探究的过程, 考虑到$f(x)f(x+\alpha)=\cos 4x$. 逆向思维, 先分解$\cos 4x$.

要将$\cos 4x$化解成两个因式的积, 根据倍角公式可知思维的路径有三条:

① $\cos 4x=(\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x-\sin 2x)$,

② $\cos 4x=2\cos^2 2x-1=(\sqrt{2}\cos 2x-1)(\sqrt{2}\cos 2x+1)$,

③ $\cos 4x=1-2\sin^2 2x$
$=(1-\sqrt{2}\sin 2x)(1+\sqrt{2}\sin 2x)$.

由③ $\begin{cases} f(x)=1-\sqrt{2}\sin 2x \\ f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2x \end{cases}$

$\Longrightarrow 1-\sqrt{2}\sin 2(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2x$

$\Longrightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

由② 设$f(x)=\sqrt{2}\cos 2x-1$, $f(\alpha+x)=\sqrt{2}\cos 2x+1$, α不存在.

点评: 追本溯源, 由$h(x)=f(x)f(x+\alpha)$想到$\cos 4x$分解成两个因式的积. 按部就班地

进行推理分析, 设计出$f(x)$. 这也是思维能力优良的重要表现.

2. 关注对数学思想方法应用的考查

第22题: 在直角坐标平面中, 已知点$P_1(1,2)$, $P_2(2,2^2)$, $P_3(3,2^3)$, $\cdots$, $P_n(n,2^n)$, 其中n是正整数, 对平面上任一点A_0, 记A_1为A_0关于点P_1的对称点, A_2为A_1关于点P_2的对称点, $\cdots$, A_n为A_{n-1}关于点P_n的对称点.

(1) 求向量$\overrightarrow{A_0A_2}$的坐标;

(2) 当点A_0在曲线C上移动时, 点A_2的轨迹是函数$y=f(x)$的图象, 其中$f(x)$是以3为周期的周期函数, 且当$x\in(0,3]$时, $f(x)=\lg x$. 求以曲线C为图象的函数在$(1,4]$上的解析式;

(3) 对任意偶数n, 用n表示向量$\overrightarrow{A_0A_n}$的坐标;

简析: 如图1, 图形给我们直观的启示

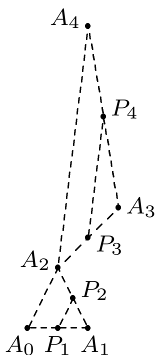


图 1

第(1)小题: $\overrightarrow{A_0A_2}=2\overrightarrow{P_1P_2}=2(2-1,2^2-2)=2(1,2)=(2,4)$.

同时又有新发现"三角形的中位线":

$\overrightarrow{A_1A_3}=2\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{A_2A_4}=2\overrightarrow{P_3P_4}$, $\overrightarrow{A_3A_5}=2\overrightarrow{P_4P_5}$.

点评: 向量本身就是数形结合的产物, 又是数形结合思想方法的代表. 正如三角形的中位线一样, 所求$\overrightarrow{A_0A_2}$与已知条件$\overrightarrow{P_1P_2}$挂上钩.

第(3)题: 由第(1)题直观图形, 加之向量运算法则, 想象与抽象出将下列向量.

$\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$,

表示为: $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_k}+\overrightarrow{A_kA_n}$ $(6<k<n)$.

考虑运用条件: 与P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n联系, $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_4A_6}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$ (n为偶数) $=2\overrightarrow{P_1P_2}+2\overrightarrow{P_3P_4}+2\overrightarrow{P_5P_6}+\cdots+2\overrightarrow{P_{n-1}P_n}=2[(1,2)+(1,2^3)+(1,2^5)+\cdots+(1,2^{n-1})]$.

第(2)题简析:

设曲线$C: y=g(x)$, $A_0(x_0,y_0)$, 则$y_0=g(x_0), x_0\in(1,4]$.

$A_2(x_2,y_2)$, 则$y_2=f(x_2)$,

$x_2\in(0,3]$时, $f(x_2)=\lg x_2$,

$\because$ $\overrightarrow{A_0A_2}=(2,4)$,

$\therefore \begin{cases} x_2-x_0=2 \\ y_2-y_0=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2=2+x_0, \\ y_2=y_0+4. \end{cases}$

$\because$ $x_0\in(1,4]$,

$\therefore$ $x_2\in(3,6]$,

$\because$ $f(x)$是以3为周期的周期函数,

$\therefore$ 当$x_2\in(3,6]$时, $y_2=f(x_2)=\lg(x_2-3)$,

$\therefore$ $y_0+4=\lg[(x_0+2)-3]$,

$\therefore$ $y_0=\lg(x_0-1)-4$,

$\therefore$ 曲线$C: g(x)=\lg(x-1)-4$. $x\in(1,4]$.

点评: 本题实际是坐标变换问题, 但是以向量形式呈现. 既考察阅读能力, 又考察对数学的领悟能力. 坐标变换后, $x_2\in(3,6]$, 再根据周期函数推出所求函数解析式.

3. 关注阅读能力及对数学的领悟能力考查(略)

4. 关注个体化评价(略)

二、需要探讨的几个问题

1. 新一轮课改与非课改的区别在哪里? 学生表现又有什么不同? 课改与非课改数学教学内容、目标基本相同, 不同的是教学方式与学习方式. 高考中用一张试卷如何甄别?

若课改学校学生没有优势? 课改何用? 反之非课改学校学生是否受到不公平待遇?

笔者以为数学试卷中21、22题, 导向是要求平时教学中要充分展现过程, 这样才能提高

对一道2005年高考解析几何题的研究性学习

441700 湖北省谷城县第三高级中学 贺 斌

一、一道高考解几题及其所带来的疑问

2005年全国高考湖北卷理21(文22)题是:

设A、B是椭圆$3x^2+y^2=\lambda$上的两点,点$N(1,3)$是线段AB的中点,线段AB的垂直平分线与椭圆相交于C、D两点.

(Ⅰ)确定λ的取值范围,并求直线AB的方程;

(Ⅱ)试判断是否存在这样的λ,使得A、B、C、D四点在同一个圆上?并说明理由.

第(Ⅱ)小题的答案是:对任意$\lambda>12$(等价于点N位于椭圆内),A、B、C、D都共圆,并且相应的圆心坐标为$M\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$.

针对上述高考题和答案,我们要问:

(1)使得A、B、C、D四点共圆的点N可以在椭圆内任意选取吗? 如果点N不具有任意性,那么点N的轨迹又是怎样的呢?

(2)题中所求圆心的坐标是一个定点,它不依赖于λ,这又意味着什么?

思维品质. 如果只是记结论搞机械训练,则很难应对这样的题型.

2.命题一般有两个途径:一是创新,二是对原有题进行实质性的替换或改造. 特别是在高考这样高利害关系的试题中更应谨慎而行.

笔者认为试卷中第12题与第19题的题型值得商讨.

第12题:用n个不同的实数$a_1,a_2,\cdots,a_n$可得到$n!$个不同的排列,每个排列为一行写成一个$n!$行的数阵. 对第i行a_{i1}, a_{i2}, $\cdots$, a_{in},记$b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1, 2, 3, \cdots, n!$. 例如:用1, 2, 3可得数阵如右,由于此数阵中每一列各数之和都是12,所以,$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$. 那么,在用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中,$b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$________.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

与该题题型十分相似,广见于一般习题集和复习资料中的一题为:

已知$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=m$,由S中任取4个元素组成S的k个子集,并将每个子集中各元素之和记为S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_k,求$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_k$.

这两题相比较,第12题似乎只作了形式的编拟,而未作实质性改动. 况且试卷中第12题的位置又具有试卷很强的“区分度”的功能,这些应引起足够重视. 对第12题,那些崇尚题海战术者必定开怀大笑,这与新一轮课改的指向背道而驰.

第19(2)题中求椭圆上的点到点M的距离最小值,题型十分陈旧. 此题只是在前面套上一顶新帽子. 这种题型对“考卷的信度”带来置疑.

结语:毋庸置疑,高考仍是教学的指挥棒. 2005年上海数学高考试卷总体来说是向新《上海课程标准》靠拢. 但离新《上海课程标准》要求,差距仍然较大. 特别是“教学活动过程”的激励与评价还需加强. 我们期望,对新课程实施应得到更大的激励.

参考文献

上海市教育委员会. 上海市中小学数学课程标准. 上海教育出版社. 2004年10月.

(3)将题中的椭圆换成其他形状的椭圆, 还能找到使A、B、C、D四点共圆的点N吗?

解决上述疑问的有效方法就是对一般情形进行探究.

二、一般性探究

设点$N(x_0,y_0)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$内的任一点, AB是椭圆的以N为中点的弦, 线段AB的垂直平分线交椭圆于C、D两点, A、B、C、D的坐标依次为(x_i,y_i) $(i=1、2、3、4)$.

显然当点N位于坐标原点时, 四个象限的角平分线与椭圆的四个交点共圆; 当N位于坐标轴上的其它位置时, A、B、C、D都不共圆.

下面讨论$x_0y_0\neq 0$的情况, 并不妨设A在B的右边.

易求得直线AB的方程为:

$$b^2x_0x+a^2y_0y-(b^2x_0^2+a^2y_0^2)=0. \quad ①$$

直线CD的方程为:

$$a^2y_0x-b^2x_0y-c^2x_0y_0=0. \quad ②$$

其中c为椭圆的半焦距.

将①与椭圆方程联立, 消y整理得

$$b^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)(x-x_0)^2=(a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2)\cdot a^2y_0^2.$$

$\because$ $N(x_0,y_0)$在椭圆内, 且$x_0y_0\neq 0$,

$\therefore$ $a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2>0$, 且$b^2x_0^2+a^2y_0^2>0$.

$\therefore$ $x_1=x_0+m$, 从而$y_1=y_0-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}m$.

其中$m=\sqrt{\frac{a^2y_0^2(a^2b^2-b^2x_0^2-a^2y_0^2)}{b^2(b^2x_0^2+a^2y_0^2)}}$.

将②与椭圆方程联立, 分别消y、消x整理得:

$$(b^6x_0^2+a^6y_0^2)x^2-2a^4c^2x_0y_0^2x+a^2c^4x_0^2y_0^2-a^2b^6x_0^2=0,$$

$$(b^6x_0^2+a^6y_0^2)y^2+2b^4c^2x_0^2y_0y+b^2c^4x_0^2y_0^2-a^6b^2y_0^2=0.$$

$\therefore$ $x_3+x_4=\frac{2a^4c^2x_0y_0^2}{b^6x_0^2+a^6y_0^2}$,

$x_3x_4=\frac{a^2c^4x_0^2y_0^2-a^2b^6x_0^2}{b^6x_0^2+a^6y_0^2}$,

$y_3+y_4=-\frac{2b^4c^2x_0^2y_0}{b^6x_0^2+a^6y_0^2}$,

$y_3y_4=\frac{b^2c^4x_0^2y_0^2-a^6b^2y_0^2}{b^6x_0^2+a^6y_0^2}$.

$\because$ CD垂直平分AB,

$\therefore$ A、B、C、D四点共圆$\iff AC\perp AD\iff \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0\iff (x_1-x_3)(x_1-x_4)+(y_1-y_3)(y_1-y_4)=0\iff x_1^2+y_1^2-x_1(x_3+x_4)-y_1(y_3+y_4)+x_3x_4+y_3y_4=0$.

将前面有关各式代入上式整理得

$$(b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2)(b^8x_0^4-a^8y_0^4)=0.$$

$\because$ 点N在椭圆内, 且$x_0y_0\neq 0$,

$\therefore$ $b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2\neq 0$,

$b^4x_0^2+a^4y_0^2\neq 0$,

$\therefore$ $b^4x_0^2-a^4y_0^2=0$.

$\because$ CD垂直平分AB,

$\therefore$ 当A、B、C、D四点共圆时, 其圆心必为CD中点. 而

$$\frac{x_3+x_4}{2}=\frac{a^4c^2x_0y_0^2}{b^6x_0^2+a^6y_0^2}=\frac{c^2x_0\cdot b^4x_0^2}{b^6x_0^2+a^2\cdot b^4x_0^2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}x_0,$$

同理$\frac{y_3+y_4}{2}=-\frac{c^2}{a^2+b^2}y_0$.

综上, 并注意到a、b在椭圆方程中形式上的地位平等性, 我们有

结论1: 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a、b为不等正数)的半焦距为c, 点$N(x_0,y_0)$是椭圆内的一点, AB是椭圆的以N为中点的弦, 线段AB的垂直平分线交椭圆于C、D两点, 则使得A、B、C、D四点共圆的点N的轨迹是: 相交于椭圆中心的两直线被椭圆截得的两条线段(除去端点), 其方程为$b^4x^2-a^4y^2=0$. 与点N相应的圆心坐标为$\left(\frac{c^2}{a^2+b^2}x_0,-\frac{c^2}{a^2+b^2}y_0\right)$ ($a>b$时), 或$\left(-\frac{c^2}{a^2+b^2}x_0,\frac{c^2}{a^2+b^2}y_0\right)$ ($a<b$时).

据此结论, 文首的疑问已烟消云散. 但我们的思考不应就此终止, 我们要问: 在其它二次曲线中有类似结论吗?

三、结论的拓广

先把容易的解决掉, 这样可以增强我们的信心. 对抛物线作类似探究(具体过程略), 我们有

结论2: 设$N(x_0,y_0)$是抛物线$y^2=2px$ $(p>0)$内(含焦点部分)的一点, AB是抛物线的以N为中点的弦, 线段AB的垂直平分线交抛物线于C、D两点, 则使得A、B、C、D四点共圆的点N的轨迹是: 关于抛物线的轴对称的两直线被抛物线截得的与抛物线开口方向一致的两条射线(除去端点), 其方程为$y^2-p^2=0$. 相应于点$N(x_0,y_0)$的圆心坐标为$(x_0+2p,-y_0)$.

在没有具体推演前, 笔者以为有了椭圆的推导基础, 对于双曲线来说已是水到渠成, 顺理成章之事了——因为它们的方程在形式上仅有一项相差一个符号. 事后发现, 这种认识过于肤浅.

事实上, 设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的半焦距为$c$, 点$N(x_0,y_0)$, AB是双曲线的以N为中点的弦, AB的垂直平分线交双曲线于C、D两点, A、B、C、D四点共圆, 其坐标依次为$(x_i,y_i)\,(i=1、2、3、4)$.

显然点N不在双曲线上, 也不在坐标轴上(当$a<b$时, 原点除外, 因为此时N可取为原点). 这样, 我们只需关注$x_0y_0\neq0$的情况.

易得直线AB的方程为:

$$b^2x_0x-a^2y_0y-(b^2x_0^2-a^2y_0^2)=0. \quad ③$$

直线CD的方程为:

$$a^2y_0x+b^2x_0y-c^2x_0y_0=0. \quad ④$$

分别将③、④与双曲线方程联立, 消去y整理得: $b^2(b^2x_0^2-a^2y_0^2)(x-x_0)^2=(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)\cdot a^2y_0^2$, ⑤

$$(b^6x_0^2-a^6y_0^2)x^2+2a^4c^2x_0y_0^2x-a^2c^4x_0^2y_0^2-a^2b^6x_0^2=0. \quad ⑥$$

⑥式的判别式为:

$$\Delta=4a^2b^6x_0^2(b^6x_0^2-a^6y_0^2+c^4x_0^2y_0^2).$$

为了保证A、B、C、D的存在性, ⑤、⑥的判别式必须大于0, 从而

$$(b^2x_0^2-a^2y_0^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)>0. \quad ⑦$$

$$b^6x_0^2-a^6y_0^2+c^4x_0^2y_0^2>0. \quad ⑧$$

满足⑦的点N只可能位于双曲线内(含焦点部分), 或双曲线两渐近线所夹的含y轴的部分. 但满足⑧的点在哪里? 我们实在搞不清楚(事实上, 也没有必要搞得很清楚)! 至此, 推导似乎陷入困境. 怎么办? 暂时抛开细节, 不要在细节上纠缠, 等主要目标实现后, 再回过头来修补. 于是, 作与椭圆情况类似的推导, 最终获得点$N(x_0,y_0)$的坐标所满足的方程为:

$$b^4x^2-a^4y^2=0. \quad ⑨$$

与点N相应的圆心坐标为
$$\left(\frac{c^2}{a^2-b^2}x_0,\frac{c^2}{b^2-a^2}y_0\right).$$

现在的问题便集中在如何对⑨中的点(x,y)作出限制. 紧盯⑧,希望渺茫. 我们得转换视角, 看看能否从已知条件中挖掘出对我们有用的信息. 我们不是要求A、B、C、D四点共圆吗? 这样, C、D就必须位于直线AB的异侧, 从而应有(y_3-y_0)与(y_4-y_0)异号, 经计算

$$(y_3-y_0)(y_4-y_0)=\frac{b^8x_0^6}{a^4y_0^4}\cdot\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2}{b^6x_0^2-a^6y_0^2}.$$

$$\therefore (b^6x_0^2-a^6y_0^2)(b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2)<0. \quad ⑩$$

这样, 要使⑦、⑩同时成立, $b^2x_0^2-a^2y_0^2$与$b^6x_0^2-a^6y_0^2$必须异号. 故

当$a=b$时, 点N不存在.

当$a<b$时, 有$b^2x_0^2-a^2y_0^2<0$, $b^6x_0^2-a^6y_0^2>0$, 此时, ⑦、⑧自然成立. 点N位于两渐近线$b^2x^2-a^2y^2=0$与两直线$b^6x^2-a^6y^2=0$所夹的不含坐标轴的四个角形区域内.

当$a>b$时, 有$b^2x_0^2-a^2y_0^2>0$, $b^6x_0^2-a^6y_0^2<0$, 要保证⑩成立. 还应有$b^2x_0^2-a^2y_0^2-a^2b^2>0$, 从而$x_0^2>a^2$, $-a^6y_0^2+c^4x_0^2y_0^2>-a^6y_0^2+c^4a^2y_0^2>0$, ⑦、⑧均成立. 此时点$N$位于两直线$b^6x^2-a^6y^2=0$与双曲线所夹的四个不含坐标轴的区域内.

解决问题的过程虽经历了一些曲折, 但这种经历锻炼了我们的思维, 丰富了我们解决问题的经验, 是非常值得, 也是非常必要的. 所得

由2005年高考(江苏卷)一道轨迹题引发的思考

226521 江苏省如皋市丁堰中学 卢坤宏

考题: 如图1, 圆O_1和圆O_2的半径都等于1, $O_1O_2=4$, 过动点P分别作圆O_1, 圆O_2的切线PM、PN (M、N为切点), 使得$PM=\sqrt{2}PN$, 试建立平面直角坐标系, 并求动点P的轨迹方程.

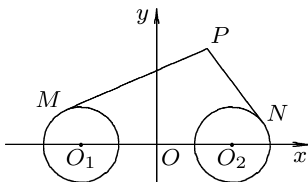


图 1

本题是由一动点出发的两条线段长之比为一定值的点的轨迹. 用这两条线段的形成和比值的变化可引发下列思考:

思考一: 若将题中的$PM:PN=\sqrt{2}$改变为$PM:PN=\lambda$, $(\lambda>0)$, 其它条件不变, 则P点的轨迹又将是什么?

分析: 以O_1O_2所在直线为x轴, O_1O_2的垂直平分线为y轴, 建立平面直角坐标系. 设P点坐标为(x,y), 易得P点的轨迹方程为$(1-\lambda^2)x^2+(4+4\lambda^2)x+(1-\lambda^2)y^2+3-3\lambda^2=0$.

当$\lambda=1$时, P点的轨迹方程可化为$x=0$, 即P点的轨迹为O_1O_2的垂直平分线.

当$\lambda\neq1$时, P点的轨迹方程可化为$\left(x-\dfrac{2\lambda^2+2}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2=\dfrac{\lambda^4+14\lambda^2+1}{(\lambda^2-1)^2}$, 即$P$点的轨迹为圆.

由此可得: 在平面内过一动点分别作两半径相等的相离的定圆的切线, 若两切线长之比为常数λ, 则当$\lambda=1$时此动点的轨迹为直线; 当$\lambda\neq1$时此动点的轨迹为圆.

思考二: 若将题中的两圆改为半径不相等相离的两定圆, 可得上述结论吗?

设平面上两个相离的圆O_1、圆O_2, 半径分别为r、R, $O_1O_2=2d$, P为平面上一动点, 过动点P分别作圆O_1、圆O_2的切线PM、PN (M、N为切点), 使得$PM=\lambda PN$, 试建立平面直角坐标系, 并求动点P的轨迹方程.

分析: 如图2, 以O_1O_2所在直线为x轴, O_1O_2的垂直平分线为y轴, 建立平面直角坐标系, 设P点坐标为(x,y), 易得P点的轨迹方

~~~~~~

结论可以说在我们的预料之外, 但又在情理之中.

结论3: 设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的半焦距为$c$, 点$N(x_0,y_0)$是双曲线所在平面上的一点, AB是双曲线的以N为中点的弦, 线段AB的垂直平分线交双曲线于C、D两点, 则使得A、B、C、D四点共圆的点N的轨迹是:

(1) 当$a=b$时, 轨迹不存在;

(2) 当$a<b$时, 轨迹是相交于双曲线中心的两直线;

(3) 当$a>b$时, 轨迹是相交于双曲线中心的两直线被双曲线截得的四条射线(除去端点).

(2)、(3) 两种情形下的方程均为$b^4x^2-a^4y^2=0$, 相应于点$N(x_0,y_0)$的圆心坐标为$\left(\dfrac{c^2}{a^2-b^2}x_0,\dfrac{c^2}{b^2-a^2}y_0\right)$.

有了结论1、2、3, 编题解题, 怎样取舍, 已完全处于我们的掌控之中. 湖北卷理21(文22)以椭圆为背景进行命制, 是一个难易适中且不偏失对主要思想方法考查的选择.

统观、细想结论1、2、3所展现的结果, 数学之美油然而生, 探寻时的一点艰辛哪里抵挡得住优美的结论所带来的愉悦心情!
~~~~~~

程为: $(1-\lambda^2)x^2+(2d+2d\lambda^2)x+(1-\lambda^2)y^2-r^2+\lambda^2R^2+(1-\lambda^2)d^2=0$.

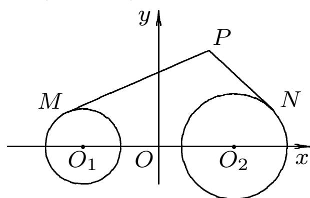


图 2

当$\lambda=1$时, P点的轨迹方程可化为$x=\dfrac{r^2-R^2}{4d}$, 即P点的轨迹为直线(人教版第二册下册85页例题2).

当$\lambda\neq 1$时, P点的轨迹方程可化为:

$$\left(x-\frac{\lambda^2d+d}{\lambda^2-1}\right)^2+y^2$$
$$=\frac{R^2\lambda^4+(4d^2-R^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2},$$

由$R>0$, $r>0$得$(R+r)^2>R^2+r^2$, 又$2d>R+r$,

故$4d^2-R^2-r^2>4d^2-(R+r)^2>0$,

故$\dfrac{R^2\lambda^4+(4d^2-R^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2}>0$.

即P点的轨迹为圆.

由此可得: 在平面内过一动点分别作两相离的定圆的切线, 若两切线长之比为常数λ, 则当$\lambda=1$时此动点的轨迹为直线; 当$\lambda\neq 1$时此动点的轨迹为圆.

思考三: 若将题中的一圆改为一定点或两圆同时改为定点, 那么结论又将如何?

显然, 只需令思考二中的$R=0$或同时令$R=0$及$r=0$, 即得.

思考四: 若将思考二中的一定圆改为一定直线, 结论又将如何呢?

如图3, 圆O_1的半径等于r, 直线l距圆O_1的圆心O_1的距离为$2d\,(2d>r)$, 过动点P分别作圆O_1的切线PM (M为切点), 作直线l的垂线PN (N为垂足)使得$PM:PN=\lambda$, $(\lambda>0)$, 试建立平面直角坐标系, 并求动点P的轨迹.

分析: 过O_1作直线l的垂线O_1Q, 垂足为

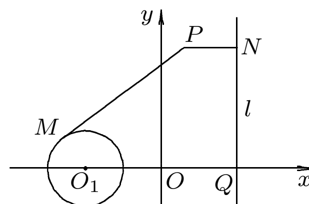


图 3

Q, 以O_1Q所在的直线为x轴, O_1Q的垂直平分线为y轴, 建立平面直角坐标系, 设P点坐标为(x,y), 易得P点的轨迹方程为:

$(1-\lambda^2)x^2+(2d+2d\lambda^2)x+y^2+d^2-\lambda^2d^2-r^2=0$,

当$\lambda=1$时, P点的轨迹方程可化为$y^2=-4dx+r^2$, 即P点的轨迹为抛物线.

当$\lambda>1$时, P点的轨迹方程可化为:

$$\left(x-\frac{d\lambda^2+d}{\lambda^2-1}\right)^2-\frac{y^2}{\lambda^2-1}$$
$$=\frac{(4d^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2},$$

由$2d>r$得$\dfrac{(4d^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2}>0$,即$P$点的轨迹为焦点在$O_1Q$上的双曲线.

当$\lambda<1$时, P点的轨迹方程可化为:

$$\left(x-\frac{d\lambda^2+d}{\lambda^2-1}\right)^2+\frac{y^2}{1-\lambda^2}$$
$$=\frac{(4d^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2},$$

由$2d>r$得 $\dfrac{(4d^2-r^2)\lambda^2+r^2}{(\lambda^2-1)^2}>0$.

即P点的轨迹为焦点在O_1Q上的椭圆.

由此可得: 在平面内, 一定圆与一定直线相离, 若一动点到定圆的切线长与该点到定直线的距离之比为常数λ, 则当$\lambda=1$时, 此动点的轨迹为抛物线; 当$\lambda>1$时, 此动点的轨迹为双曲线; 当$\lambda<1$时, 此动点的轨迹为椭圆.

若再将思考四中的圆改为定点, 即变为: 一动点到定点的距离与定直线的距离之比为常数λ, 则当$\lambda=1$时, 此动点的轨迹为抛物线; 当$\lambda>1$时, 此动点的轨迹为双曲线; 当$\lambda<1$时, 此动点的轨迹为椭圆. 即得到圆锥曲线的第二定义.

从上海市高三竞赛题看归纳猜测到证明

200011 上海市大同中学 张亚东

数学教育家波利亚说过, “观察试验、归纳猜测, 在数学研究中起着非常重要的作用, 可以说它们是数学发展的源泉.” 刚刚结束的2005年上海市高三数学竞赛, 最后两道题难倒了不少选手. 事实上, 如果从简单的情形摸索规律, 灵活运用先猜后证的数学思想, 不难找到解题方法. 现以这两道题为例, 谈谈如何通过归纳推理的方法, 寻找到解题的途径.

题1 设$[x]$表示不超过实数x的最大正整数, 求集合

$$\left\{n\,\middle|\,n=\left[\frac{k^2}{2005}\right],1\leqslant k\leqslant 2004,k\in\mathbf{N}\right\}$$

的元素个数.

[分析] 2005数据太大, 我们不妨从简单情况摸索规律开始.

$$\left[\frac{1^2}{2}\right]=0,\ \left[\frac{1^2}{3}\right]=0,\ \left[\frac{2^2}{3}\right]=1,$$

$$\left[\frac{1^2}{4}\right]=0,\ \left[\frac{2^2}{4}\right]=1,\ \left[\frac{3^2}{4}\right]=2,\cdots,$$

$$\left[\frac{1^2}{10}\right]=\left[\frac{2^2}{10}\right]=\left[\frac{3^2}{10}\right]=0,\ \left[\frac{4^2}{10}\right]=1,$$

$$\left[\frac{5^2}{10}\right]=2,\ \left[\frac{6^2}{10}\right]=3,\ \left[\frac{7^2}{10}\right]=4,$$

$$\left[\frac{8^2}{10}\right]=6,\ \left[\frac{9^2}{10}\right]=8.$$

这里从最简单的情况出发, 不仅熟悉了题意, 而且看出了规律: 当$n=10$时, 前面几个取遍0、1、2、3、4, 从$k=8$开始出现跳跃, 且数值各不相同. 解题的关键是如何确定从哪一项开始出现跳跃, 所以结合高斯函数的性质得到如下解法: 由$\dfrac{(k+1)^2}{2005}-\dfrac{k^2}{2005}=\dfrac{2k+1}{2005}>1\Longrightarrow k>1002$, 即当$k=1003,1004,\cdots,2004$时出现跳跃且结果各不相同; 当$k=1,2,\cdots,1002$时, $\left[\dfrac{(k+1)^2}{2005}\right]=\left[\dfrac{k^2}{2005}\right]$或$\left[\dfrac{(k+1)^2}{2005}\right]=\left[\dfrac{k^2}{2005}\right]+1$, 又$\left[\dfrac{1002^2}{2005}\right]=500$, 所以$\left[\dfrac{k^2}{2005}\right]$能取遍$0,1,\cdots,500$. 所以共有$501+(2004-1002)=1503$个元素.

[说明] 这里没有运用任何高深的数学竞赛知识, 而是从最简单的特殊情况出发, 通过观察, 摸索规律, 最终找到解题途径, 这种寻找解题途径的方法, 值得我们仔细琢磨.

题2 数列$\{f_n\}$的通项公式为 $f_n=\dfrac{1}{\sqrt5}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$, $n\in\mathbf{Z}^+$, 记$S_n=C_n^1f_1+C_n^2f_2+\cdots+C_n^nf_n$, 求所有正整数$n$, 使得$S_n$能被8整除.

[分析] 记$\dfrac{1+\sqrt5}{2}=\alpha$, $\dfrac{1-\sqrt5}{2}=\beta$, 则

$S_n=\dfrac{1}{\sqrt5}[(C_n^1\alpha+C_n^2\alpha^2+\cdots+C_n^n\alpha^n)-(C_n^1\beta+C_n^2\beta^2+\cdots+C_n^n\beta^n)]=\dfrac{1}{\sqrt5}[(\alpha+1)^n-(\beta+1)^n]=\dfrac{1}{\sqrt5}\left[\left(\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\dfrac{3-\sqrt5}{2}\right)^n\right]$.

设$\dfrac{3+\sqrt5}{2}=x$, $\dfrac{3-\sqrt5}{2}=y$, 则有$x+y=3$, $xy=1$, $x-y=\sqrt5$. 接下来又如何思考呢? 我觉得最好的手段还是从$n=1$开始摸索规律: $n=1$时, $S_1=\dfrac{1}{\sqrt5}(x-y)=1$, 不能被8整除; $n=2$时, $S_2=\dfrac{1}{\sqrt5}(x^2-y^2)=\dfrac{1}{\sqrt5}(x+y)(x-y)=3$, 不能被8整除; $n=3$时, $S_3=\dfrac{1}{\sqrt5}(x^3-y^3)=\dfrac{1}{\sqrt5}(x-y)[(x+y)^2-xy]=8$, 能被8整除; $\cdots\cdots$; $n=6$时, $S_6=\dfrac{1}{\sqrt5}(x^6-y^6)=\dfrac{1}{\sqrt5}(x^3-y^3)(x^3+y^3)=$

$S_3(x+y)[(x+y)^2-3xy]=18S_3$, 所以$8|S_6$. 由此可以猜想当$3|n$时, $8|S_n$. 这里通过摸索规律, 不仅猜测到了结论, 同时也找到了递进关系, 为数学归纳法扫清了障碍, 下面用数学归纳法证明.

(1) $n=3$时成立; (2)假设$n=3k-3$, $n=3k$时均有$8|S_{3k-3}$, $8|S_{3k}$, 则当$n=3k+3$时, $S_{3k+3}=\frac{1}{\sqrt{5}}(x^{3k+3}-y^{3k+3})=\frac{1}{\sqrt{5}}[(x^{3k}-y^{3k})(x^3+y^3)+x^3y^{3k}-y^3x^{3k}]=18S_{3k}-(xy)^3S_{3k-3}$, 由归纳假设知, $n=3k+3$时结论成立, 所以猜想得证.

这里还有一个问题, 如何说明$n=3k+1$, 或$n=3k+2$时, S_n不能被8整除呢? 当然也可运用数学归纳法去证明, 这里我们不妨把证法作如下的改进: $S_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}(x^{k+1}-y^{k+1})=\frac{1}{\sqrt{5}}[(x^k-y^k)(x+y)+xy^k-yx^k]=\frac{1}{\sqrt{5}}[3(x^k-y^k)-(x^{k-1}-y^{k-1})]=3S_k-S_{k-1}$, 找到了连续3项之间的关系, 故可以算出$\{S_n\}$各项除以8的余数依次为1、3、0、5、7、0、1、3、$\cdots$, 是一个以6为周期的周期数列, 从而可得, 当且仅当$3|n$时, $8|S_n$.

[说明] 此题粗看非常抽象, 无从下手, 但通过归纳猜想, 寻找到了S_n能被8整除的自然数n的规律, 然后利用数学归纳法证明了这一规律.

运用上述想法, 请有兴趣的读者尝试解决以下问题:

1. (2005年上海市高中数学竞赛) $\mathrm{i}^{0!}+\mathrm{i}^{1!}+\mathrm{i}^{2!}+\cdots+\mathrm{i}^{100!}=$ __________, (i表示虚数单位).

提示: 规律为$\mathrm{i}^{n!}(n>4)=(\mathrm{i}^4)^k=1\,(k\in\mathbf{N})$, 所以结论为$95+2\mathrm{i}$.

2. 因式分解: $S_n=1-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x(x-1)-\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

提示: $S_1=1-\frac{x}{1!}=1-x$;

$S_2=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=\frac{(1-x)(2-x)}{2}$;

$S_3=S_2-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$
$=\frac{(1-x)(2-x)(3-x)}{3!}$;

上述结果提示我们猜想:
$S_n=\frac{(1-x)(2-x)\cdot\cdots\cdot(n-x)}{n!}$,
然后用数学归纳法证明(略).

3. (2003年全国高中数学竞赛)一张纸上画有半径为R的圆O内一定点A, 且$OA=a$, 折叠纸片, 使圆周上某一点A'刚好与点A重合. 这样的每种折法, 都留下一条折痕. 当A'取遍圆周上所有点时, 求所有折痕所在直线上点的集合.

提示: 取水平和竖直的四条特殊的折痕, 由此可以猜测: 折痕PQ到不了的地方必为内接于矩形的某个对称图形. 设半径OA'与折痕的交点为P, 由$|PO|+|PA|=R$知, 点P的轨迹是以点O、A为焦点的椭圆, 其方程为$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{R}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=1$, 最后只要证折痕$PQ$与该椭圆相外切即可知所有折痕所在直线上点的集合为椭圆外(包含边界)所有的点.

4. (2000年全国高中数学竞赛)已知C_0: $x^2+y^2=1$和C_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 试问: 当且仅当$a$、$b$满足什么条件时, 对$C_1$上任意一点$P$, 均存在以$P$为定点与$C_0$外切, 与$C_1$内接的平行四边形? 并证明你的结论.

提示: 取椭圆的长轴两端点和短轴两端点, 四点连线构成一个特殊的椭圆内接菱形, 此菱形要与单位圆相外切, 必须圆心$O(0,0)$到直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$的距离等于半径1, 即$\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$, 也就是$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$, 必要条件已找到, 再证充分性即可.

5. (2002年全国高中数学竞赛)有一列曲线P_0, P_1, P_2, $\cdots$, 已知P_0所围成的图形是面积为1的等边三角形, P_{k+1}由对P_k进行如下操

(下转第11–2页)

对"一道高中竞赛题的探讨与推广"的再探讨

430079 华中师范大学数统学院 徐章韬 兰 冲

文[1]对2004年全国高中数学联赛的一道试题进行了深入探讨. 题目如下.

如图1, 点O在$\triangle ABC$内部, 且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$\triangle ABC$的面积与$\triangle AOC$的面积比是……( )

(A) 2; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 3; (D) $\frac{5}{3}$.

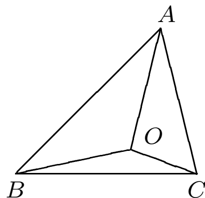


图 1

文[1]指出: 既然向量可转化为坐标, 何不通过坐标的计算达到确定点O的目的, 或许是计算坐标有些繁, 使人放弃了这一有效途径……. 事实上, 本题亦可用坐标法解出, 并不复杂, 确实是一条巧妙的途径. 为此, 我们先给出一个命题:

如图2, 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$, 则

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

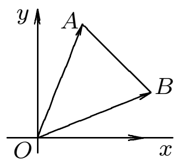


图 2

证明: 设$\angle AOB=\theta$, 则

$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$,

又$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta$,

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$,

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

此公式并不难记忆, 当$x_1y_2-x_2y_1=0$时, 此时A、O、B三点共线, 面积自然为0. 此公式其实是三角形面积公式向量表达式的展开结果.

可使用以上结论解此题. 建立如图3的坐标系, 设$B(x_1,y_1)$、$C(x_2,y_2)$、$O(x_3,y_3)$, 由$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 即$(-x_3,-y_3)+2(x_1-x_3,y_1-y_3)+3(x_2-x_3,y_2-y_3)=\overrightarrow{0}$, 即$-x_3+(2x_1-2x_3)+3(x_2-x_3)=0$, $-y_3+(2y_1-2y_3)+3(y_2-y_3)=0$. 解出,

$6x_3=2x_1+3x_2$, $6y_3=2y_1+3y_2$.

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|x_2y_3-x_3y_2|$$
$$=\frac{1}{2}\left|x_2\cdot\frac{2y_1+3y_2}{6}-\frac{2x_1+3x_2}{6}\cdot y_2\right|$$
$$=\frac{1}{6}|x_2y_1-x_1y_2|,$$
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|x_2y_1-x_1y_2|,$$
$$\therefore S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AOC}.$$

再解推广后的命题, 设O是$\triangle ABC$所在平面上的一点, m、n、p是三个实数, 若$m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 试求$\triangle ABC$与$\triangle AOC$的面积比.

如图3, $m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}+p\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 即$m(-x_3,-y_3)+n(x_1-x_3,y_1-y_3)+p(x_2-x_3,y_2-y_3)=\overrightarrow{0}$, 即

(下转第11-20页)

对日本高中数学教育的思考

——基于新高中数学学习指导要领的观点出发

日本福井大学教育学部学部长、教授 黑木哲德 福井大学博士生 赵雪梅

自2004年4月起, 日本的各个高中开始执行文部省(相当于中国的教育部)于2000年3月颁布的新的高中数学学习指导要领 (简称新要领)[1].

一、学习指导要领所揭示的方向

这个新要领提出的目标是: "加深对数学基本概念和基本定理的理解; 提高对事物予以数学观察和处理的能力; 通过数学活动, 在建立创造性基础的同时, 明确运用数学观察及思考方法的好处, 培养学生们积极灵活运用这两种方法的态度" (高中学习指导要领第2章第4节第一款).

在初中阶段, 所谓了解数学活动的趣味性指的是"能够积极开展数学活动, 在观察、使用和实践的过程中, 寻找出事物之间的关系和规律". 也就是, 一边加深对数学概念和数学定理的理解, 一边寻找它们之间的关系, 从而提倡学习的重要性. 上述高中目标是建立在这个初中目标之上的.

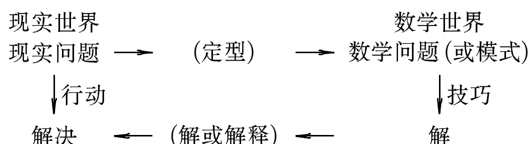
美国的NTCM, 所谓解决问题的学习有以下3种:

(1) 有关解决问题的学习;

(2) 为了解决问题的学习;

(3) 基于解决问题的学习.

其中, 对于(3)可以作出下列陈述. 它是"一连串解决问题的过程: 首先用数学问题来定型现实问题, 再运用数学技巧解答这个问题, 然后将答案放回到现实世界, 以谋求原始问题的解决". 下图说明了这一解决问题的过程[2]:



有人希望这儿所说的基于解决问题的学习是对应上述目标的后半部分. 遗憾的是我们认为照搬NTCM的做法对日本的高中教育是不适合的. 我们认为更有效的是提倡"综合性学习". 除了学习数学的方法, 还要认识到数学的价值.

在教学中, 最基本和最重要的是课程设置. 高中数学学习指导要领的修订版与原有的相比较, 并没有发生多大的变化. 在修订版中, 引进了综合性学习, 设置了一个新的课程, 变更了选择方法, 还有诸如将原来初中时所学的内容放一部分到高中课程中等等细微的变化. 这么一来, 反而使高中数学内容变得更死板.

在这儿, 我们将通过原有课程中所存在的问题, 分析新要领作出了多少程度的改变以及不足之处, 对今后数学教育的发展方向提出看法.

二、对高中原有课程的评价

在上一版学习指导要领的指导下, 高中数学课程已经被彻底改变了. 这个变化在于大幅度地引进选择性. 高中数学课程由两个部分组成. 一个是基础课程的数学Ⅰ、数学Ⅱ和数学Ⅲ. 另一个是以选择课程形式出现的数学A、数学B和数学C. 具体做法是数学Ⅰ和数学A的4个内容中所选的2个构成高一的课程内容. 高二则是数学Ⅱ和数学B的4个内容中所选的2个. 高三是数学Ⅲ和数学C的4个内容中所选的2个.

针对这一设计, 在高中教师中进行过问卷调查. 调查结果显示:

1. *系统性的问题, 主要表现在:*

(1) 引入A、B、C等选择, 造成数学基本体系的散乱. 对学生们来说, 很难做到系统化的理解.

(2) 选择内容的罗列, 指导焦点的模糊, 对教师们来说, 增加了教学的难度.

(3) 松散的系统性, 对数学不好的学生们来说, 负担并没有减少.

2. 选择制度的问题, 主要表现在:

(1) 多数教师认为与过去相比, 现在的A、B、C选择制度使教学变得困难.

(2) 没有形成学生做主的选择制度.

(3) 尽管内容牵涉面广而浅, 可供选择的内容增多, 但也不是说容易教会那些不能升学的学生.

3. 教学时间的问题, 主要表现在:

(1) 教学内容过密, 导致在标准时间内完不成, 只能通过加课来完成.

(2) 理科班的教材非常死板. 数学Ⅲ在增加内容的基础上, 集中了较有深度的内容, 使高三理科班的学生们承担很重的负担.

(3) 文科班的教材与理科班的差距太大.

三、新的课程设置概况

在新要领的必修课程中, 新添了一门称为"数学基础"的课程.

现在, 构成高中数学的课程有:

1. 必修课程:

(1) 数学基础和数学Ⅰ.

所有的学生进入高中后必须在这两门课程中选择一门作为自己的必修课程. 其中, 选择数学基础的学生在高中阶段, 只需要在高一学习一年的数学就可以了.

(2) 数学A、数学Ⅱ、数学Ⅲ.

数学A的学习与数学基础或数学Ⅰ是平行进行的. 完成数学Ⅰ的学习之后, 是数学Ⅱ, 而数学Ⅱ之后是数学Ⅲ.

2. 选修课程:

与从前一样, 从4个内容中至少选择2个来学习.

(1) 数学B.

原则上, 数学B在修完数学Ⅰ之后, 可以与数学Ⅱ或者数学Ⅲ平行学习.

(2) 数学C.

原则上, 数学C在修完数学Ⅰ和数学A之后.

新、老要领下的课程设置对照表:

	新要领下的课程	老要领下的课程
必修	数学基础	
	数学Ⅰ	数学Ⅰ
	数学Ⅱ	数学Ⅱ
	数学Ⅲ	数学Ⅲ
	数学A	数学A
选修	数学B	数学B
	数学C	数学C

由初中移到高中的学习内容:

初中数学内容名称、所在年级	移动后所在年级
初中一年级: 实数分类表和实数四则运算规则	数学Ⅰ
初中二年级: 一元一次不等式	数学Ⅰ
三角形的几何重心	数学A
数据的整理	数学基础、数学B
初中三年级: 二次方程的根的表达式	数学Ⅰ
函数的概念	数学Ⅰ
相似图形的面积比和体积比	数学Ⅰ
球的表面积和体积	数学Ⅰ
圆周角和圆内接四边形	数学A
总体与样本	数学基础、数学C

新课程和原有课程内容的对比:

名称 \ 对比	新课程	原有课程
数学基础	数学和人类的活动 社会生活中, 数理方面的考察, 切身的统计	
数学Ⅰ	方程和不等式 二次函数 初等几何图形的计算	二次函数 初等几何图形的计算 集合的元素 概率
数学A	初等平面几何图形 集合和逻辑 排列、组合与概率	数和式 平面几何 数列 计算和电脑
数学Ⅱ	式及其证明 初等解析几何 初等函数 初等微分和初等积分	初等函数 初等解析几何 函数值的变化
数学Ⅲ	极限 微分 积分	函数和极限 微分 积分
数学B	数列 平面矢量 统计和电脑 数值计算和电脑	平面矢量 复数和复平面 随机变量与分布函数 算法和电脑
数学C	行列式及其应用 二次曲线 随机变量与分布函数	行列式及其计算 二次曲线 数值计算
	统计处理	统计处理

四、以高中教育为出发点, 探讨数学课程的问题

环顾高中教育, 我们认为它具有以下2个立场:

(1) 是培养具有良好素质的市民的完成教育.

(2) 是为了进一步的职业教育和大学程度以上教育而作的准备教育.

第一点是关于高中数学课程的选择方法的改变. 根据修订版, 从小学到高中, 为了适应孩子们的多样性, 进一步推广了一种新做法: 同一个教授科目中, 设置多个选择分支. 那么, 这种做法是正确的吗? 孩子们的多样性究竟指的是什么? 随着时代的发展, 确实存在不得不发生变化的东西. 但那只是价值观的多样性, 未必与学习内容的多样性连接在一起.

作为高中毕业生的数学标准, 不仅有必要向高中生本人指出, 而且有必要向社会上的普通人公开. 实际上, 选择制度看似站在孩子们的立场上, 却很难说清楚它是否真的考虑到有益于孩子们的成长. 当然, 这种选择制度与市民的教育是没有关系的.

第二点在高中数学中, 新设了称为"数学基础"的课程. 我们列出以下3个项目的内容:

(1) 数学和人类的活动;

(2) 社会生活中, 数理方面的考察;

(3) 切身的统计.

在数学基础这门课程中, 强调了引用数学史授课的必要性. 问题是如果不理解数学的含义, 仅仅从数学史的观点出发, 把数学价值观作为自己的问题来领会, 那决不是件容易的事. 做的效果不好的情况下, 很可能变成过去在幼儿教育中流行一时的那种教育方法, 即让小孩子阅读伟人的传记. 如何巧妙灵活地通过数学史来帮助学生们理解数学概念, 这不仅是一个尺度的问题, 也是涉及到教师们的知识面的宽窄的问题. 在这方面, 可以参阅黑木哲德教授所著的《数学符号》.

记得曾听到过这样一种建议: "并不是仅仅执着于技能的熟练, 假如能够集中在不断提高学生的兴趣和关心, 开展能够体会成就感的活动, 那就更好". 只要一想到学生们的学习现状和数学基础这个课程的设置背景, 就觉得这个建议近乎于纸上谈兵. 假如数学基础的目标和内容深刻阐述了每个人的理解方法以及价值观的性质, 对于连计算都危险的学生来说, 这个价值观的形成就不是嘴上说说那么容易了. 那些对数学正在形成其他想法(比如数学是困难的、叫作数学的这个东西就是烦人等等)的学生们就算表现出一时兴起, 大概还是不能克服死气沉沉的感觉. 与其这样, 还不如制定这样一个方向: 内容的设置能让学生自己感受到通过学习所取得的进步. 让他们以全新的进取心, 花上2年左右的时间去学能够学会的内容, 并且记住有用的东西. 这才是一个切实可行的方向. 尽管以提高兴趣和关心为目标是一件重要的事, 可是要素主义式的分解学习内容, 硬塞给学生的做法, 是不能达到这个目标的. 最好的对症下药的疗法是摆脱死气沉沉, 在这方面是有不少事例的.

参考文献

[1]《高中学习指导要领》. 2000年3月颁布. 时事通信社.

[2] 松下佳代. 《教材和学具的分析》. 教育方法学研究第17卷. 1991.

[3] 松下佳代. 《学习和教学的联结点》. 福井大学集中讲义资料.

(上接第11–48页)

则是数学的大脑. 创新有战略上的创新和战术上的创新之分. 波利亚的解题理论是微观分析, 主要是解题的策略选择, 技巧的运用, 属于数学战术层次; 另一种解决问题的途径是大视野的分析, 通过战略的思考, 注重数学的本质, 发展新的数学课题. 三根导线这样的问题, 超出了波利亚解题理论的范围, 属于战略上的思考.

"三根导线"的故事, 堪称中国数学教育的经典之作. 它为什么不能进入数学教科书? 我们的数学观念是否有需要改进的地方?

“三根导线”的故事*

张奠宙

1990年的一天, 上海市第五十九中学(今上海市南洋初级中学)的陈振宣老师对我讲了一个数学教育的故事. 我以为, 那是中国数学教育的一个亮点, 堪称经典.

陈老师说, 他的一个学生毕业后在和平饭店做电工. 工作中发现在地下室控制10层以上房间空调的温度不准. 分析之后, 原来是使用三相电时, 连接地下室和空调器的三根导线的长度不同, 因而电阻也不同. 剩下的问题是: 如何测量这三根电线的电阻呢? 用电工万用表无法量这样长的电线的电阻. 于是这位电工想到了数学. 他想: 一根一根测很难, 但是把三根导线在高楼上两两相连接, 然后在地下室测量“两根电线”的电阻是很容易的. 设三根导线电阻是x、y、z. 于是, 他列出以下的三元一次联立方程: $\begin{cases} x+y=a, \\ y+z=b, \\ z+x=c. \end{cases}$ 解之, 即得三根导线电阻.

这样的方程谁都会解. 但是, 能够想到在这里用方程, 才是真正的创造啊! 我为这位电工的数学意识所折服.

清代学者袁枚曾说: “学如箭镞, 才如弓弩, 识以领之, 方能中鹄”. 有知识, 没有能力, 就象只有箭, 没有弓, 射不出去. 但是有了箭和弓, 还要有见识, 找到目标, 才能打中. 上面的例子说明, 解这样的联立方程, 知识和能力都不成问题, 难的是要具有应用联立方程的意识和眼光.

这使我想起第二次大战以后, 1948年时在美国出现的数学. 这一年, 维纳发表《控制论》, 仙农发表《信息论》, 冯·诺依曼: 提出使用至今的计算机方案.



维纳 N·Wiener 1894–1964



仙农 C·E·Shannon 1916–2001



冯·诺依曼 Von Neumann 1903–1957

这三项数学成就, 不是通常我们所解决的那种数学问题. 他们看见了我们没有看见的数学问题. 试问:打电报传送的信息, 可以是数学研究的对象吗? 用大脑控制手去拾地下的铅笔, 可以构成“数学控制论”吗? 研究数字电子计算机会改变时代吗? 他们看见了新的数学, 在1948年不约而同地做出了创造性的杰出贡献, 影响之大, 使人类在20世纪下半叶进入信息时代.

在别人看不见的地方, 发现数学问题, 解决数学问题, 这是最高的数学创新. 这比做别人给出的问题, 更胜一筹. 国际数学奥林匹克竞赛金牌难拿, 高考的一些数学题目很不好做. 能够拿金牌, 得高分, 肯定是一种能力. 但是只会把“别人已经做过的问题重做一遍” 是远远不够的. 在看起来“没有数学问题”的地方发现数学问题, 那往往是“大”的数学创造. 和平饭店的电工同志的解决数学问题的可贵, 也正在此. 对基础教育来说, 如何培养这样的创新性学习, 更值得深思.

我们常说, 问题是数学的心脏; 那么, 创新

(下转第11–47页)

*这是作者在庆贺陈振宣先生执教60周年学术研讨会上的发言

编者的话 展望2006年 增添栏目 增设论坛

本刊自2003年由双月刊改为单月刊后, 一些栏目如“数学教学研究”、“数学探究”、“数学解题研究”、“数学史”、“考试之窗”、“数学竞赛”、“编后漫笔”等受到读者厚爱与欢迎. 为使栏目在原有基础上更为丰富, 拟从2006年起, 增添“国外数学教学”、“课程标准及新教材研究”、“考试命题研究”、“编读往来”等栏目, 并增设“中考、高考考试改革”大众论坛, 各抒己见, 集思广益, 期待广大读者踊跃赐稿.

从2006年起, 本刊改为大16开, 版面容量增加, 因此, 每期售价由原3.80元调整为4.80元, 望谅解.

数 学 教 学 单月刊 大16开48页
主编: 张奠宙 赵小平
中华人民共和国教育部主管 华东师范大学主办
贯彻改革精神 反映国内外中学数学教改动态
立足上海 面向全国 注重质量 讲究实效
《数学教学》创刊51周年
网址: http://menet.math.ecnu.edu.cn/teaching
Email: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn
邮编: 200062 电话: 021–62232712
邮发代号4–357, 每期定价4.80元, 欢迎向当地邮局订购

(上接第11–16页)
为C、B、A1、A2、A3、A+、A++等, 教师可以根据开放性问题本身所具的思维含量来确定等级, 根据不同情况做出相应的调整.

三、给教师的建议

教师在运用SOLO分类法进行答案评分时, 要注意以下几个方面的问题:

第一, 要根据思维层次来打分, 而不是根据采分点来打分. 思维层次的划分根据题目的思维含量来确定, 但一般应该有三个以上的层次.

第二, 对于样板式标准答案, 教师不应拘泥于标准答案的表述, 而应该深入考查该题目思维层次划分的依据和方法.

第三, 可由多个教师合作评分. 作为一种等级描述的质性评定方法, 不可能不带有主观性, 不同教师对层次划分的界限会存在一些差异, 这样会对评分的效度造成一定的影响. 为了尽可能地减少误差, 可以由多个教师合作来评分, 最后取平均值, 不失为一种好的尝试.

最后, 在大规模的终结性考试评价中, 在大规模评卷之前应该有一个试评的工作, 目的就是通过抽样评卷来充实各层次的例子, 以方便一般教师更好地操作, 使评价结果能够更好地反映学生的真实情况.

参考文献

[1] Biggs. JB.(1999). Teaching for Quality Learning at University. Soceity for Research in Higher Education. Open University Press.

[2] 龚雷、戴再平. 进入考试的数学开放题. 数学教学. 2004. 2.

编后漫笔

珍视我国数学教育的创新亮点

忻重义

今年10月, 我和张奠宙先生一起参加了"陈振宣先生从教60周年的学术研讨会". 会上张先生介绍了"三根导线"的故事(见本期P.48), 我觉得该故事引人深思.

张先生认为, "三根导线"的故事堪称中国数学教育的经典, 应该收入初中数学教科书, 让大家分享这位"电工"的创新思想. 我想这一建议很重要, 我们应该珍视自己的点滴创造.

数学教育的改革, 不要老是看外国. 用外国的理念, 外国的名词, 外国的例子, 作为学习和参照, 自然是需要的. 然而, 对自己的创造, 觉得没什么了不起, 稍加欣赏就丢在一边, 则是骨子里的"看不起自己"的成分在起作用.

三根导线的故事, 写入"三元一次方程组"的教材, 或者作为"数学应用"、"数学文化"、"阅读材料", 宣传一下, 恐怕是百益而无一害的吧.

"三根导线"这样的创新, 其实还有不少. 我们高考、中考里出现了许多好题目, 应该冠以名字, 广泛流传. 日积月累, 中国的数学经验才能显示自己的特色.

是否珍视我国自己的创新, 是民族自信心的一种表现. 数学"双基"是否可以作为一种理论? 我国的解题教学是否超越了波利亚? 开放题进入国家考试是否是一个突破? 都是可以研究的. 但是, 林林总总的国家经验研究规划, 是否可以给这些研究以必要的支持呢? 很少. 猴子掰棒子, 掰一个, 丢一个, 何时能有中国的数学教育?

在积累自己经验, 创建中国特色的数学教育上, 教科书的编写, 媒体的宣传作用重大, 本刊愿尽自己的一份责任.

(上接第11–27页)

映, 这两种方法属"神来之笔", 是"高斯级"人物才能想到)和应用上的局限性, 教师可作为第二种方法补充介绍. 甚至, 作为教材改革, 可考虑直接将"倒序相加法"和"错位相减法"放入阅读材料当中, 并恰当加入数学史内容, 供学生参考学习. 我想, 这一做法无疑是符合新课程标准提出的高中数学课程应具有的基础性、多样性和选择性原则的.

参考文献

1. 狄海鸣. 对平方数累加公式的探讨. 数学教学. 2005. 3.

2. 李少保、陈飞莉. 数列求和方法教学设计对比研究. 数学教学. 2003. 4.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第11期
(总第218期)
主编: 张奠宙 赵小平
常务副主编: 忻重义
电 话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出 版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字 0 7 0 1 7 号
印 刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元 国内统一刊号: CN31–1024/G4 每月12日出版 代号: 4–357